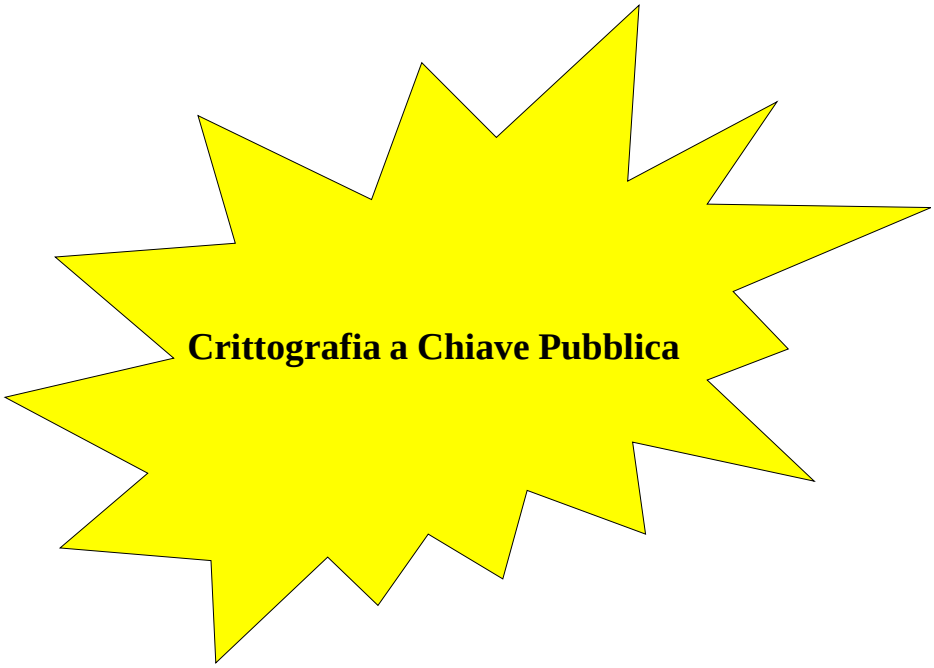


Problemi difficili

Assunzione: per certi problemi della Teoria dei numeri non si troveranno mai algoritmi con tempo polinomiale

P1: logaritmo discreto (gruppo ciclico o GF(p^n))

Scambio DH, Cifrario ElGamal, Firma DSS

Safe prime: **p = 2q+1** con **q** *primo di Sophie Germain*

q si ottiene dalla progressione 6k-1

P2: radice e-esima - Dato un **n** prodotto di due primi, un **e** coprimo con Φ(n) ed un elemento $\mathbf{c} \in \mathbf{Z_n}$ trovare un intero **m** tale che

$c=m^e \bmod n$ $\qquad m \equiv \sqrt[e]{c}$

Cifrario RSA

Il problema è facile se si conoscono i fattori di n o se n è primo

P3: fattorizzazione

P3: problema della fattorizzazione - Dato un intero positivo **n**, trovare i numeri primi p_i ed i coefficienti interi $e_i \geq 1$ tali che
$n = p_1^{e1} \times ... \times p_k^{ek}$ (Crittografia asimmetrica: $n = p_1 \times p_2$)

Cifrario RSA

- Gauss e Fermat: **20** cifre decimali
- 1970: **41** cifre decimali con un main frame
- 1977, Rivest: **125** cifre decimali è un calcolo impossibile
- 1994: **129** cifre decimali in 8 mesi con 1.600 workstations
- 2000 (stima): **150** cifre decimali in un anno con una macchina parallela da 10 milioni di dollari
- 2004: TWINCLE, setaccio "optoelettronico" (2-3 ordini di grandezza)
- 2004 (prev.): **300** cifre decimali (1024 bit)
- 2014 (prev.): **450** cifre decimali (1500 bit)

Teoria dei numeri (1)

Utilizzata per: DH
Firma digitale
Cifratura a chiave pubblica

- **b divisore di a:**
  b | **a** se a = m × b con m intero
- **p numero primo:**
  se i suoi divisori sono solo 1 e p
- **fattorizzazione di n**:
  $n = p_1^{e1} \times p_2^{e2} .. \times p_k^{ek}$ con $p_1 \ldots p_k$ **primi**, **ei** interi **≥0**
- **massimo comun divisore di a,b:**
  MCD(a,b) = k con k più grande divisore di a e di b
- **a, b coprimi (o relativamente primi): non hanno fattori primi in comune**
  MCD(a,b) = 1
- **a mod n:**
  resto della divisione di **a** ≥ 0 per **n** > 0
- **a congruo a b modulo n:**
  a ≡ b (mod n) se **a mod n = b mod n**

Teoria dei numeri (2)

- Dato un intero positivo **n** si indica con

Z_n = {0,1, …, n-1} l'insieme di tutti gli interi non negativi < **n**
(Zn denota un anello in cui sono definite operazioni di addizione e e moltiplicazione modn)
Z^*_n = { a $\in Z_n$ | MCD(a,n) = 1}insieme dei coprimi con **n**
Z^*_p = {1, …, p-1} insieme di tutti gli elementi non nulli di Z_p quando **p** è primo (gcd(0,p)=p)

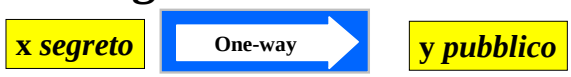
- **funzione totiente di Eulero:** n° di interi < **n** e coprimi con n

$\Phi(n) = n\times(1-1/p_1) \times \ldots \times(1-1/p_k)$ dove i **p_k** sono i primi che compongono la fattorizzazione di n

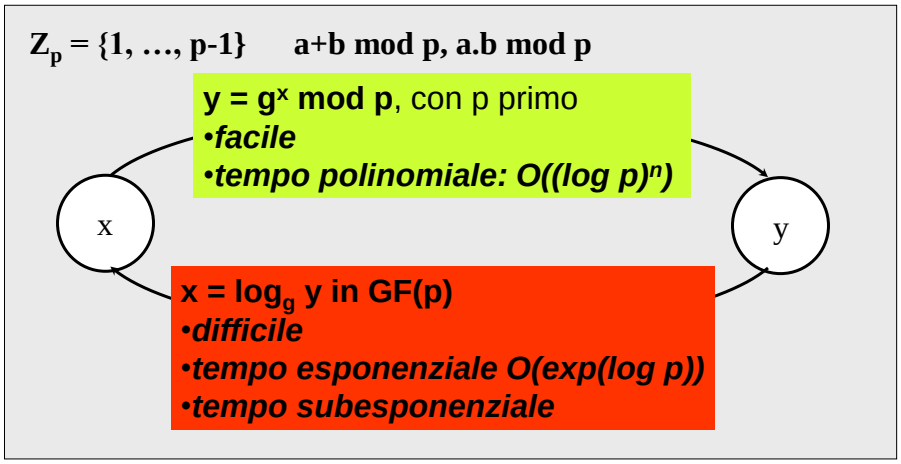
1. **Φ(n) = n-1** se **n** è primo
2. **Φ(n) = (p-1)(q-1)** se **n** è il prodotto di due primi **p** e **q**

Φ (6)=2 (1 e 5)

Crittografia asimmetrica



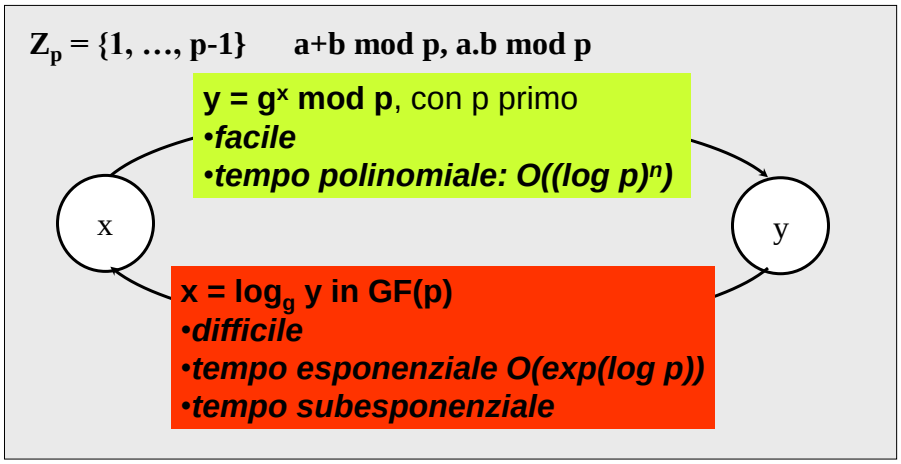
Scambio DH (nel campo finito GF(p))



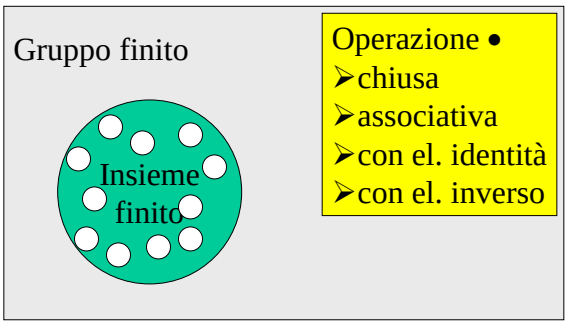
Crittografia asimmetrica

x *segreto* — **Teoria dei numeri** — ***y pubblico***

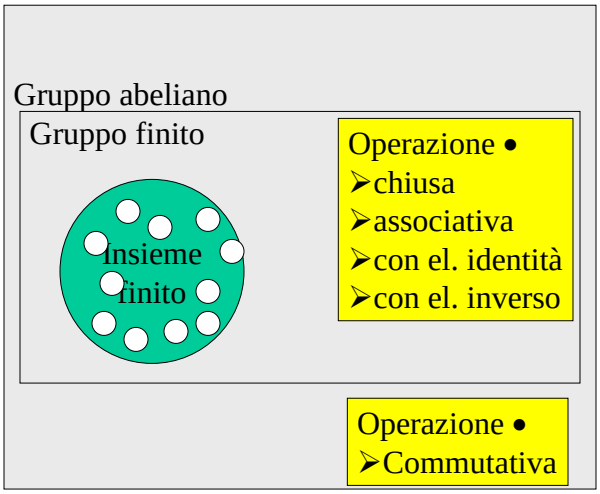
Scambio DH (nel campo finito GF(p))



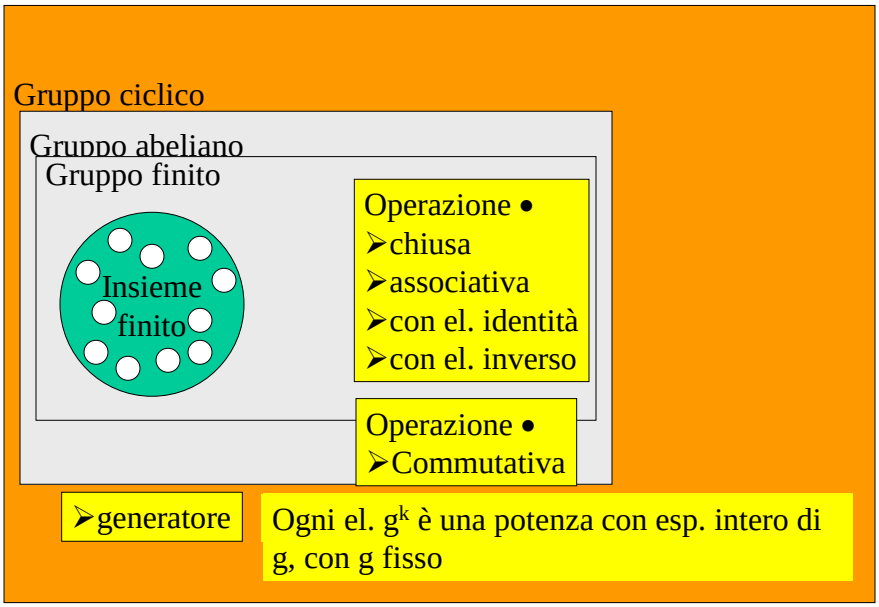
Insieme finito di elementi affiancato da un'operazione binaria che associa a ciascuna coppia (a,b) di elementi di G un elemento (a • b) sempre di G con le proprietà sotto elencate

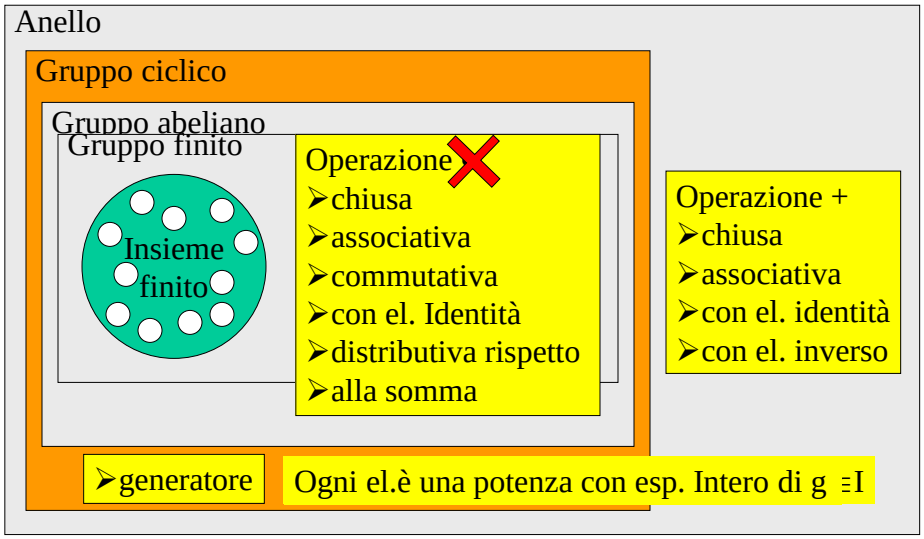


Chiusura: se a e b appartengono a G, anche a • b appartiene a G
Associatività: a •(b • c)=(a • b) • c per ogni, a,b, c di G
El. Identità: esiste un elemento di G tale per cui: a•e=e•a=a per ogni a
El. Inverso: per ogni a di G esiste un b di G tale che a•b=b •a=e

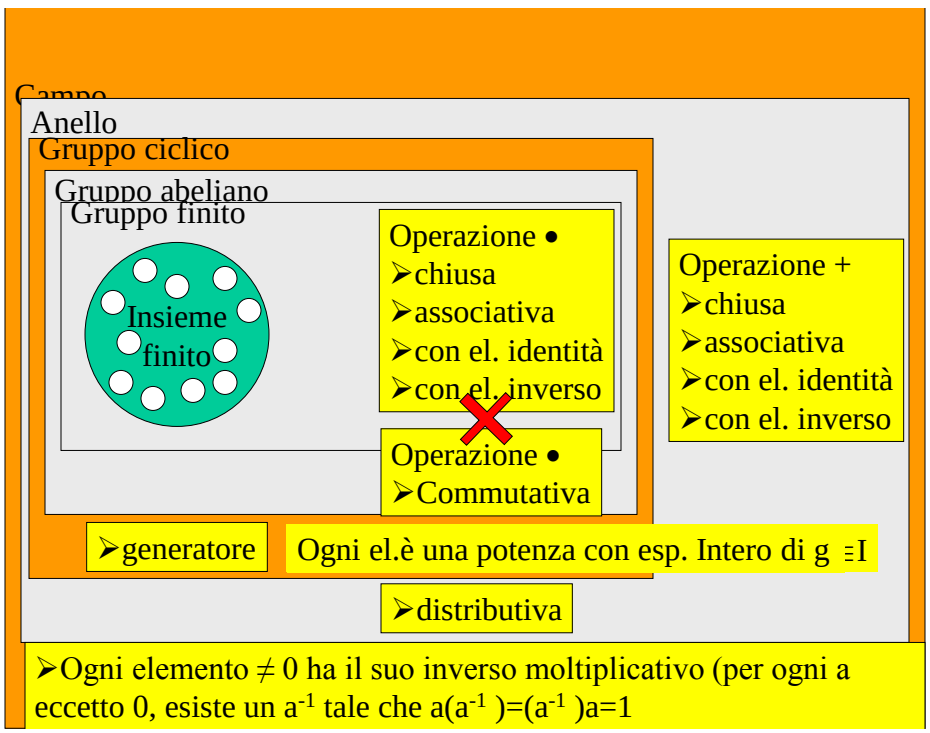


Commutativa: a • b =b •a





Insieme finito di elementi con due operazioni binarie, somma e moltiplicazione con proprietà sopra elencate.
Un anello è un insieme i cui si possono eseguire somma, sottrazione (a-b= a+ (-b)) e moltiplicazione senza uscire dall'insieme



GF(p): elementi, operazioni e proprietà

Campo finito (**Campo di Galois**) è definito su $\mathbf{Z_p}$
(insieme con un numero finito di elementi su cui sono definite somma e molt. modulo p)

n = 1: GF(p) — $\mathbf{Z_p = \{0, 1, \ldots, p\text{-}1\}}$

$a,b \in \mathbf{Z_p}$
$a,b \in \mathbf{Z^*_p}$

Addizione: **(a+b) mod p**
Moltiplicazione: **(a × b) mod p**

O(log p) operazioni su bit
O((log p)²) operazioni su bit

Proprietà notevole dell'Aritmetica modulare
Sia **m primo o composto** e siano **a,b interi qualsiasi** , allora

(a+b) mod m = ((a mod m) + (b mod m)) mod m
(a×b) mod m = ((a mod m) × (b mod m)) mod m
(conviene ricondursi a due numeri congruenti con quelli assegnati, eseguire le operazioni e poi dividere il risultato per m)

p = 11

Z_{11}: {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

Z^*_{11}: {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

Φ(11) = p-1 = 10

GF(11): addizione

(3+1)+2 = 3+(1+2)

chiusura

associativa

commutativa

elemento identità

inverso additivo

x \ y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

(x + y) mod 11

Inverso additivo: Per ogni w in GF(11) esiste z tale che w+z congruo con 0mod11

Tutti i ris. appartengono a Z_{11} (**chiusura**)
Ogni riga e colonna contiene una permutazione di Z_{11}
Scambiando l'ordine degli addendi si ottiene lo stesso risultato (commut.)
La somma di un elemento con 0 fornisce l'elemento stesso (0 è elem. identità)
In ogni riga/colonna lo 0 è presente solo una volta (esistenza dell'inverso additivo)

GF(11): moltiplicazione

chiusura

associativa

commutativa

elemento identità

reciproco

distributiva

x \ y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0											
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2		2	4	6	8	10	1	3	5	7	9
3		3	6	9	1	4	7	10	2	5	8
4		4	8	1	5	9	2	6	10	3	7
5		5	10	4	9	3	8	2	7	1	6
6		6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
7		7	3	10	6	2	9	5	1	8	4
8		8	5	2	10	7	4	1	9	6	3
9		9	7	5	3	1	10	8	6	4	2
10		10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

(x × y) mod 11

Ogni riga della tabella (ad esclusione di a=0) è una permutazione in Z_{11}
L'elemento identità nella moltiplicazione é 1
L'inverso moltiplicativo per ogni a diverso da 0 è il valore di b che fornisce axbmod11=1; tale valore è presente una sola volta (ad esclusione di a=0) in ogni riga e in ogni colonna (ad esclusione di b=0)

Generatori modulo p

T6: "per ogni primo **p**, esiste un **g < p**, detto **radice primitiva** di p, o anche generatore modulo p, le cui potenze

$$g^1 \bmod p\ ,\ g^2 \bmod p\ ,\ \ldots\ g^{p-1} \bmod p$$

forniscono tutti gli interi compresi tra **1** e **p-1**"

	e									
b	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1
3	3	9	5	4	1	3	9	5	4	1
4	4	5	9	3	1	4	5	9	3	1
5	5	3	4	9	1	5	3	4	9	1
6	6	3	7	9	10	5	8	4	2	1
7	7	5	2	3	10	4	6	9	8	1
8	8	9	6	4	10	3	2	5	7	1
9	9	4	3	5	1	9	4	3	5	1
10	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1

permutazioni di Z^*_{11}

$\Phi(n) = n(1-1/p_1)\ldots(1-1/p_k)$

T6bis: "le radici primitive di **p** sono **$\Phi(p-1)$**. $\Phi(10) = (2-1)(5-1) = 4$

Esponenziazione modulare

$$a = b^e \bmod m$$

$$a = (b \times b \times \ldots \times b) \bmod m$$

e *volte*

$$a = [(b \bmod m) \times (b \bmod m) \times \ldots \times (b \bmod m)] \bmod m$$

e *volte*

$$b,e \in Z_m$$

Caso peggiore e=m-1
m moltiplicazioni → $2^{\log m}$ moltiplicazioni
O(exp(log m)) !!
Algoritmi più efficienti

A0: un primo algoritmo di esponenziazione

b^e mod m | b,e $\in \mathbf{Z_m}$ | m **primo** o **composto**

Sia $t = \lceil \log_2 m \rceil$

La rappresentazione in base 2 di **e** è:

$e = e_{t-1}\, 2^{t-1} + e_{t-2}\, 2^{t-2} + \ldots\ldots\ldots + e_1\, 2^1 + e_0\, 2^0$

Di conseguenza si ha:

$b = b^{e} = b^{e_{t-1} 2^{t-1}} \times b^{e_{t-2} 2^{t-2}} \times \ldots. \times b^{e_1 2^1} \times b^{e_0 2^0}$

1: si calcola b, b^2, b^4 , b^8 ecc.

2: si moltiplicano tra loro i b^i per cui $e_i = 1$

3: si divide per m, trattenendo il resto

Caso peggiore: circa **2.t** moltiplicazioni (..ma su numeri sempre più grandi!)

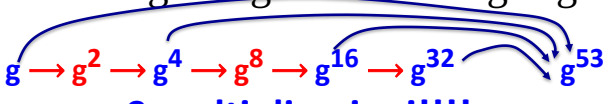
Exponentiation

Finite cyclic group G (for example $G = \mathbb{Z}_p^*$)

Goal: given g in G and x compute g^x

Example: suppose $x = 53 = (110101)_2 = 32+16+4+1$

Then: $g^{53} = g^{32+16+4+1} = g^{32}.g^{16}.g^4.g^1$



9 moltiplicazioni!!!!

The repeated squaring alg.

Input: g in G and x>0 ; **Output**: g^x

write $x = (x_n\, x_{n-1} \ldots x_2\, x_1\, x_0)_2$

```
y <- g  ,  z <- 1
for i = 0 to n do:
if  (x[i] == 1):     z = z·y
y <- y^2
output  z
```

example: g^{53}

y	z
g^2	g
g^4	g
g^8	g^5
g^{16}	g^5
g^{32}	g^{21}
g^{64}	g^{53}

Repeated square and multiply: A1

Riducendo in modulo il risultato di ogni moltiplicazione si riesce ad operare sempre e solo su numeri inferiori a m

Non separando il calcolo dei $\mathbf{b^i}$ da quello di $\mathbf{\Pi(b^i)^{ei}}$ **(calcolo elevamenti a quadrato dalle moltiplicazioni)** si ottengono tempi di esecuzione più brevi

INPUT: $b \in Z_m$, $0 \le e < m$, $e = (e_{t-1} .. e_0)_2$

OUTPUT: $b^e \bmod m$

1. Set y ←1. If e = 0 then return (y)
2. Set A ← b
3. If e_0 =1 then set y ← b
4. For i from 1 to t-1 do the following:
   4.1 Set A ←A^2 mod m
   4.2 If e_i =1 then set y ← A y mod m
5. Return (y)

m = 11, b = 7, e = 5 = $(101)_2$
1. **y = 1**
2. **A = 7**
3. **y = 7**
4 **i = 1**
   4.1 **A = 7 × 7 mod 11 = 5**
  i = 2
   4.1 **A = 5 × 5 mod 11 = 3**
   4.2 **y = 3 × 7 mod 11 = 10**
5. **7^5 mod 11 = 10**

Repeated square and multiply: A2

INPUT: $b \in Z_m$, $0 \leq e < m$, $e = (e_{t-1}..e_0)_2$

OUTPUT: $b^e \bmod m$

1. $y \leftarrow 1$
2. For i from t-1 down to 1 do the following
   2.1 $y \leftarrow y^2 \bmod n$
   2.2 If $e_i = 1$ then $y \leftarrow y\ b \bmod m$
3. Return (y)

1. **y = 1**
2. **i = 2**
   2.1 **y = 1 × 1 mod 11 = 1**
   2.2 **y = 1 × 7 mod 11 = 7**
   i = 1
   2.1 **y = 7 × 7 mod 11 = 5**
   i = 0
   2.1 **y = 5 × 5 mod 11 = 3**
   2.2 **y = 3 × 7 mod 11 = 10**
5. **7^5 mod 11 = 10**

Proprietà notevole di A1 e di A2:
Sia **t** il numero di bit della rappresentazione binaria dell'esponente **e**
Sia **n** il numero di bit dell'esponente con valore **1**
TEMPO DI ESECUZIONE → **t+n** moltiplicazioni
TEMPO MEDIO → **3/2 t** moltiplicazioni

Complessità

TEMPO DI ESECUZIONE → **t+n** moltiplicazioni

$O(\lceil \log_2 m \rceil)$ moltiplicazioni

Moltiplicazione e divisione: $O((\log m)^2)$ operazioni su bit

Esponenziazione: $O((\log m)^3)$ operazioni binarie.

Robustezza e tempo d'esecuzione
Modulo: da 1024 bit a 2048 bit
Tempo: da 1 a 8

Nota Bene
Se b=2, i primi elevamenti al quadrato e moltiplicazioni si fanno con shift.
Se e = 11 oppure 1000000000000001, le moltiplicazioni sono solo 2

Logaritmo discreto

T8: “ Dati un primo **p**, un generatore **g** ed un qualunque intero **y** $\in Z^*_p$, esiste un unico intero **x** , $1 \leq x \leq p-1$, tale che $g^x \bmod p = y$.

	i									
g	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1
6	6	3	7	9	10	5	8	4	2	1
7	7	5	2	3	10	4	6	9	8	1
8	8	9	6	4	10	3	2	5	7	1

$g = 2 \rightarrow x = 8$
$g = 6 \rightarrow x = 2$
$g = 7 \rightarrow x = 4$
$g = 8 \rightarrow x = 6$

$y = 3$

Numeri primi

Distribuzione dei numeri primi

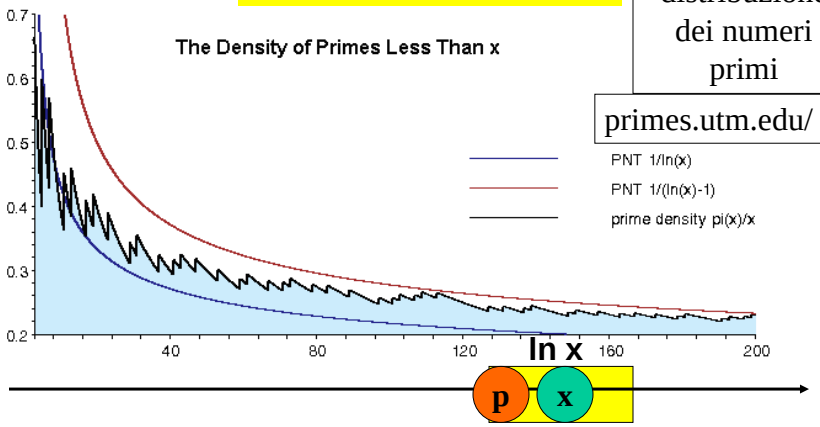
π(x): n° di primi nell'intervallo 2÷**x**

T9:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x / \ln x} = 1$$

Fornisce indicazione sulla distribuzione dei numeri primi

primes.utm.edu/



Dato x grande è probabile trovare un primo p in un intorno di ampiezza ln x

Ricerca di numeri primi grandi

1- Ricerca di un numero primo

1. **x** dispari, generato a caso nel desiderato intervallo
2. If (x primo?) = *false* then repeat 1.
3. Return **x**

Test di primalità

2- Ricerca di un numero primo

1. **x** dispari, generato a caso nel desiderato intervallo
2. If (x primo?) = *false* then **x = x + 2** and repeat 2.
3. Return **x**

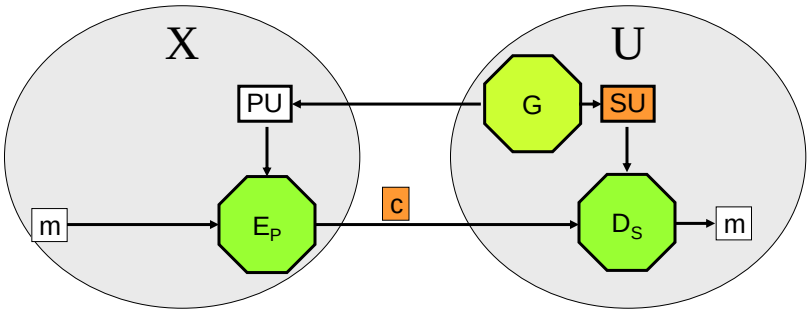
Test di primalità

Test di primalità

1. Test **deterministici**: se **n** non lo supera è **composto**,
   se lo supera è **primo**
2. Test **probabilistici**: se **n** fallisce il test è **composto**;
   se lo supera è **probabilmente primo**

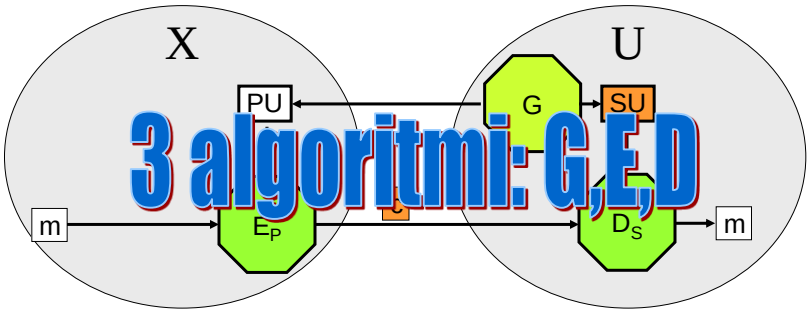
I test deterministici sono computazionalmente più onerosi dei test probabilistici.
2002: algoritmo polinomiale AKS (Indian Institute of Technology)
I test probabilistici (es. Miller Rabin)sono polinomiali, ma devono essere poi ripetuti
più e più volte per far tendere a 1 la probabilità di avere realmente individuato un primo.

Aspetti caratteristici



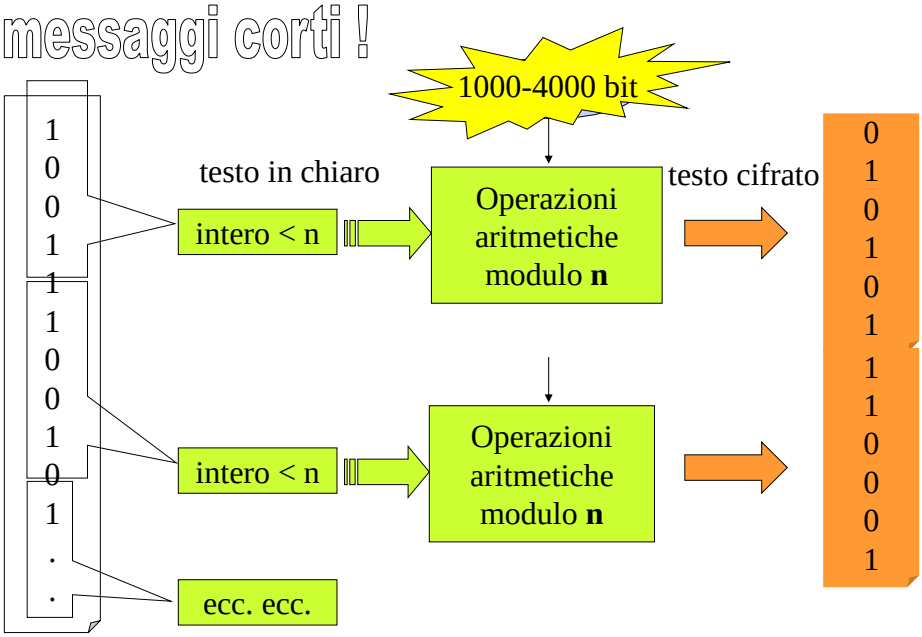
1. Frammentazione del testo in chiaro
2. Aleatorietà del testo cifrato
3. Variabilità della trasformazione
4. Problema difficile su cui si basa la sicurezza
5. Modalità d'impiego

Aspetti caratteristici

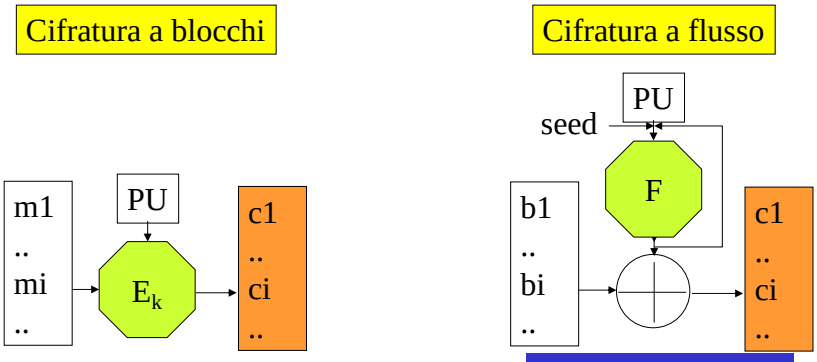


1. Frammentazione del testo in chiaro
2. Aleatorietà del testo cifrato
3. Variabilità della trasformazione
4. Problema difficile su cui si basa la sicurezza
5. Modalità d'impiego

1 - Frammentazione del testo in chiaro



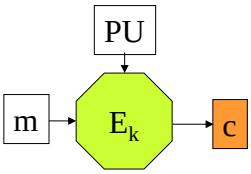
Cifratura a blocchi ed a flusso



I bit di chiave sono ottenuti con moltiplicazioni ed esponenziazioni => molto lenti

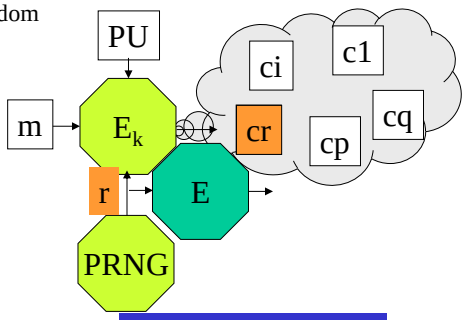
Cifrari deterministici e Cifrari probabilistici

fissati m e chiave il testo cifrato è unico



$c = E_{PU}(m)$

a parità di chiave il testo cifrato è scelto di volta in volta tra molti possibili in base a un numero random

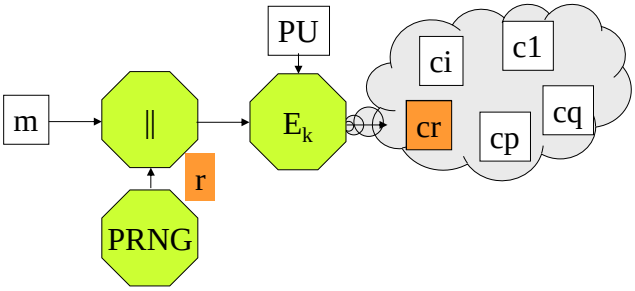


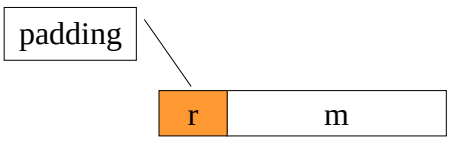
$c = E_{PU}(m,r)||E(r)$

I Cifrari deterministici sono più efficienti, ma ..
1: blocchi in chiaro identici producono blocchi cifrati identici

2: sono vulnerabili ad attacchi con testo in chiaro noto (es. si/no in voto elettronico)

Randomizzazione di un Cifrario deterministico





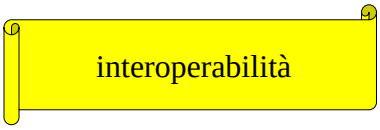
Ridondanza:
$c = E(r||m)$

Oppure CBC e IV

4 – I problemi difficili dei cifrari asimmetrici

Cifrario	Proprietà	Tipo	Sicurezza
RSA	deterministico	a blocchi	P2, P3
ElGamal	probabilistico	a blocchi	P1
Rabin	deterministico	a blocchi	P3, P5
Golwasser-Micali	probabilistico	a flusso	P6
Blum-Goldwasser	probabilistico	a flusso	P3, P5
Chor-Rivest	deterministico	a blocchi	P4

5 - Public Key Cryptography Standards



PKCS # 1 - The RSA encryption standard
PKCS # 3 - The Diffie-Hellman key-agreement standard
PKCS # 5 - The password-based encryption standard (PBE)
PKCS # 6 - The extended-certificate syntax standard (X509)
PKCS # 7 - The cryptographic message syntax standard
PKCS # 8 - The private-key information syntax standard
PKCS # 9 - This defines selected attribute types for use in other PKCS standards.
PKCS # 10 - The certification request syntax standard
PKCS # 11 - The cryptographic token interface standard
PKCS # 12 - The personal information exchange syntax standard.
PKCS # 13 - The elliptic curve cryptography standard
PKCS # 14 - This covers pseudo random number generation (PRNG).
PKCS # 15 - The cryptographic token information format standard.

The RSA Algorithm (1978)

Public key: {n,e}
n = p×q con p e q primi
e coprimo con **Φ(n)= (p-1)(q-1)**

Encryption

- Plaintext: **m < n**
  con m con dimensione di k bit dove $2^k<n<=2^{k+1}$
- Ciphertext: **$c = m^e \bmod n$**

Private key: {n,d}
$d = e^{-1} \bmod \Phi(n)$

Decryption

- Ciphertext: **c < n**
- Plaintext: **$m = c^d \bmod n$**

The RSA Algorithm (1978)

Public key: {n,e}
n = p×q con p e q primi
e coprimo con **Φ(n)= (p-1)(q-1)**

Private key: {n,d}
d = e^{-1} mod **Φ(n)**
d coprimo con Φ(n)

Decryption

- Ciphertext: **c < n**
- Plaintext: **$m = c^d \bmod n$**

anzichè $m \equiv \sqrt[e]{c}$

dato che **$d = e^{-1} \bmod \Phi(n)$** inverso moltiplicativo

si dimostra formalmente che **$c^d \bmod n \equiv m^{ed} \pmod n \equiv m$ se m<n** ed **e coprimo con Φ(n)** (ad ogni testo cifrato deve corrispondere un solo testo in chiaro)

L'algoritmo G: RSA Key Pair Generation

• Select *p,q*	***p* and *q* both prime**
• Calculate *n*	***n* = *p* x *q***
• Calculate Φ(*n*)	**Φ(*n*) = (*p*-1)(*q*-1)**
• Select integer *e*	**gcd(Φ(*n*),*e*) = 1; 1<e<Φ(*n*)**
• Calculate *d*	***d* = e^{-1} mod Φ(*n*)**
• Public Key	**k[pub] = {e,n}**
• Private key	**k[priv] = {d,n}**

Tutti gli algoritmi in gioco sono polinomiali

Il calcolo di e

$\gcd(\Phi(n),e) = 1;\ 1<e<\Phi(n)$

L'algoritmo esteso di Euclide permette di calcolare il gcd di due interi e se gcd(a,b)=1 l'inverso di uno dei due modulo l'altro. Quindi posso calcolare tra e e Φ(n) qual è il loro gcd e se gcd(e, Φ(n))=1 trovare poi d

Ora il problema è trovare e. Si può per il calcolo di e scegliere a caso un r< Φ(n) e poi verificare se r coprimo con Φ(n). In caso contrario si itera il procedimento. Di solito bastano poche prove

Il calcolo di d: algoritmo esteso di Euclide

MCD(a,b) = c = x a + y b

a, b interi positivi; $a \geq b > 0$

Poni $x_2 = 1$, $x_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_1 = 1$

Finché $b > 0$

- calcola $q = \lfloor a/b \rfloor$, $r = a - q.b$
- calcola $x = x_2 - q.x_1$, $y = y_2 - q.y_1$
- poni $a = b$, $b = r$,

  $x_2 = x_1$, $x_1 = x$, $y_2 = y_1$, $y_1 = y$

Restituisci **$c = a$; $x = x_2$; $y = y_2$**

$O((\ln n)^2)$

Permette di trovare oltre che MCD(a,b). Se poi MCD(a,b)=1 permette di trovare anche l'inverso moltiplicativo di b

Generazione della chiave

- n=pxq NOTO=> per impedire di trovare p e q con metodi esaustivi p e q scelti in un insieme di sufficientemente esteso (p e q numeri molto estesi)

  Anche il metodo per trovare numeri primi di grandi dimensioni deve essere ragionevolmente efficiente

Non esistono ora tecniche utili per fornire numeri primi arbitrariamente estesi. La procedura normalmente scelta è: si sceglie casualmente un numero dispari dell'ordine di grandezza desiderato e si verifica se tale numero è primo tramite test probabilistici (test ad es. Miller Rabin)

Generazione della chiave

- Si sceglie casualmente un intero dispari (con PRNG)
- Si sceglie casualmente a<n
- Si esegue un test di primalità con il parametro a. Se n fallisce il test rifiutare il valore e tornare al passo 1
- Se n passa un numero sufficiente di test accettare n altrimenti tornare al passo 2

Quanti numeri rifiutati? Circa ln(n) ma visto che i numeri pari vanno scartati solo circa ln(n)/2
N= 2^{200}

Circa 70 tentativi

Generazione della chiave

- Scelti p e q si scelgono o e o d. Supponiamo e: con il metodo di euclide esteso si sceglie e coprimo con Φ(n) e si calcola l'inverso di uno degli interi modulo l'altro. Si generano numeri casuali e si confrontano con Φ(n), fino a trovare un coprimo (pochi test)

Aspetti Computazionali

- Generazione della chiave
- Cifratura/decifrazione

Per rendere efficiente:

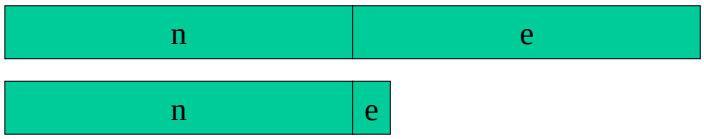
- la cifratura (**$x^e \bmod n$**) si adottano gli algoritmi "repeated square and multiply" con scelta opportuna di e; x<n
- la decifrazione si ricorre al teorema cinese dei resti (CTR) (impiego efficiente della chiave privata)

La scelta di e per cifrare (impiego efficiente della chiave pubblica)

N.B. Se il numero binario **e** contiene pochi “uni” il calcolo di $\mathbf{m^e}$ è più efficiente !

$e = 3$
$e = 2^{16} - 1$
$e = 2^{32} - 1$

Se viene scelto e=65537 e poi si generano pe q potrebbe accadere che MCD(Φ(n), e) sia diverso da 1, quindi vanno rifiutati perché e deve essere coprimo con Φ(n)



Sicurezza di RSA

- Forza bruta
- Attacchi matematici
- Attacchi a tempo
- Attacchi a testo cifrato scelto

Attacchi Matematici

- Fattorizzazione di n nei suoi due fattori primi => questo permette di calcolare la funzione totiente di Eulero (p-1)(q-1) e quindi d
- Determinare direttamente la funzione totiente di Eulero (p-1) x(q-1) senza prima determinare p e q
- Determinare direttamente d senza prima determinare la funzione toziente di Eulero (p-1) x(q-1)

caso più frequente è la fattorizzazione

Algoritmi di Fattorizzazione

Trial division:
1. i=1
2. individua p(i): i-esimo primo
3. calcola n/p(i)
se ***resto* ≠ 0**, i = i+1 e goto 2
altrimenti **I° fattore = *quoziente***

I° fattore < sqrt(n)
O(exp (½ (log n)))

. . . . .

General Number Field Sieve:
$O(\exp (\log n)^{1/3} . (\log(\log n))^{2/3})$

Per ridurre la possibilità di attacco si possono anche imporre vincoli su p e q:

"p, q *strong primes* : p-1, p+1, q–1, q+1 con grandi fattori primi

"$|p-q| > n^{1/2}$ "

1024 – 2048 bit

Attacchi a Tempo

- Si basano unicamente sul testo cifrato
- Si è dimostrato che si può determinare una chiave privata analizzando il tempo impiegato dai computer per decifrare i messaggi
- Sono analoghi a un ladro che cerca di indovinare la combinazione di sicurezza di una cassaforte osservando il tempo impiegato per ruotare la manopola

Contromisure: ad es. tecnica di blinding

- Si genera numero casuale segreto r compreso tra 0 e n-1
- Si calcola $c' = c(r^e)$
- Si calcola $m' = (c')^d \bmod n$
- Si calcola $m = m' r^{-1} \bmod n$ con r^{-1} inverso moltiplicativo di r modulo n

Attacchi a Testo Cifrato Scelto

Contromisura: padding OAEP

Randomizzazione di RSA

RSA esegue una sostituzione semplice di blocchi ed è deterministico:
1- **m** identici generano **c** identici
2 - per certi **m** si ha **c = m**

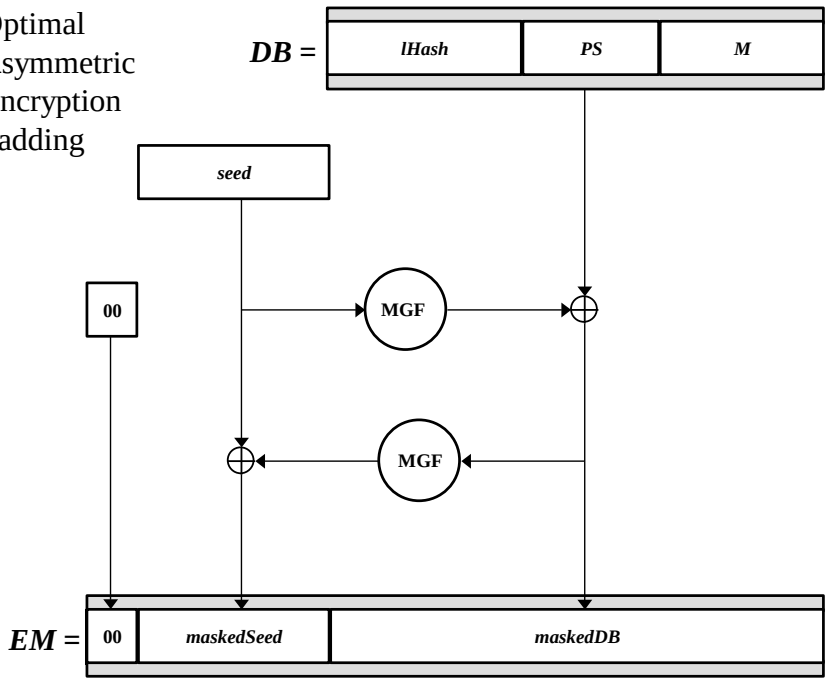
Standard PKCS#1v2

OAEP: Optimal Asymmetric Encription Padding

0x**00**||**maskedSeed**||**maskedDB**

n bit

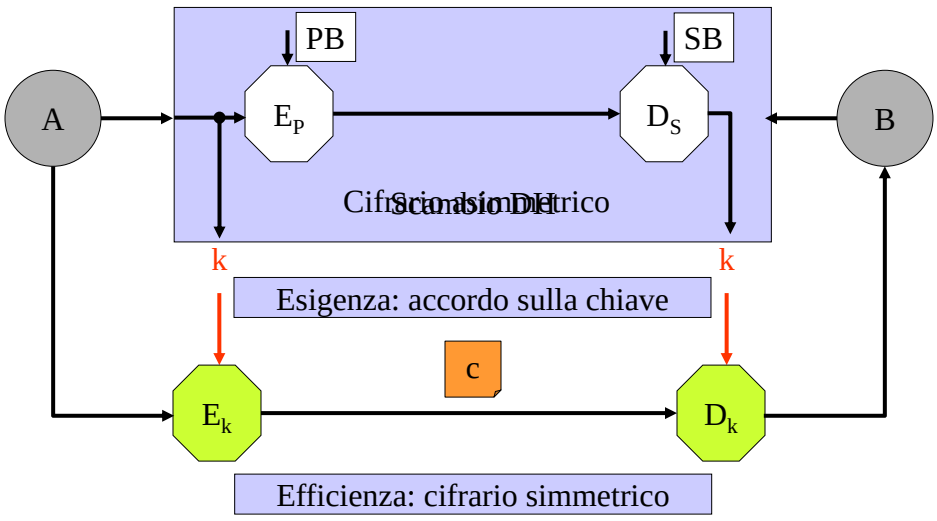
Optimal
Asymmetric
Encryption
Padding



Il Cifrario ibrido

KA con Cifrario asimmetrico

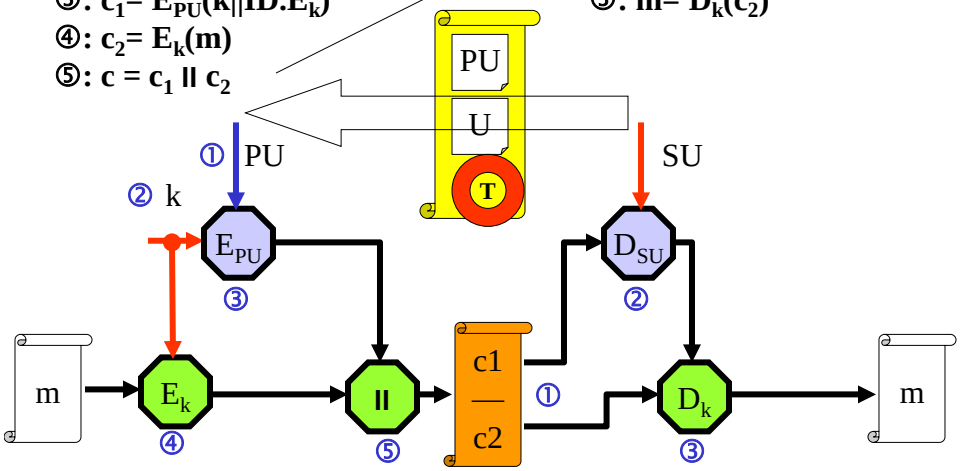
Problema: A e B vogliono scambiarsi informazioni riservate in assenza di accordi precedenti



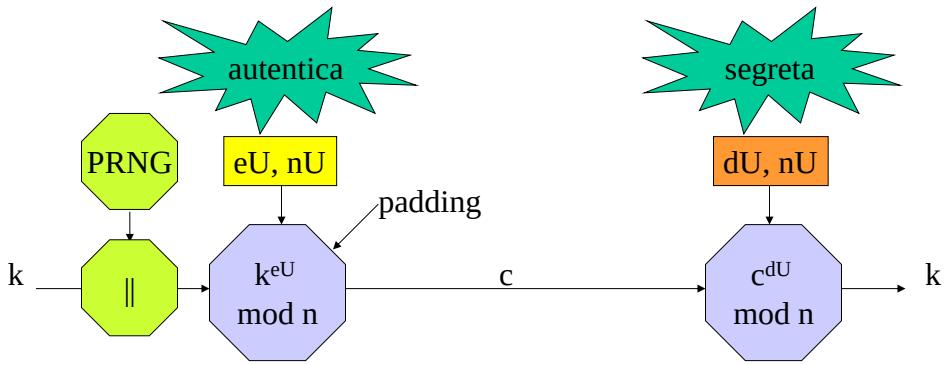
Il cifrario ibrido
(asimmetrico □ e simmetrico □)

Sorgente X
①: si procura PU
②: genera a caso k e sceglie E_k
③: $c_1 = E_{PU}(k||ID.E_k)$
④: $c_2 = E_k(m)$
⑤: $c = c_1 \,||\, c_2$

Destinazione U
①: separa c_1 e c_2
②: $k = D_{SU}(c_1)$
③: $m = D_k(c_2)$



Chiave di sessione con RSA



Vulnerabilità: $k^{eU} < n$ con k ed e numeri piccoli

Contromisura PKCS#1v2
1: padding con r di 64 bit
2: padding OAEP

Firma digitale

La firma digitale di un documento informatico deve:

1- consentire a **chiunque** di identificare **univocamente** il firmatario,

Crittografia asimmetrica

2- non poter essere **imitata** da un impostore,

3- non poter essere **trasportata** da un documento ad un altro,

4- non poter essere **ripudiata** dall'autore,

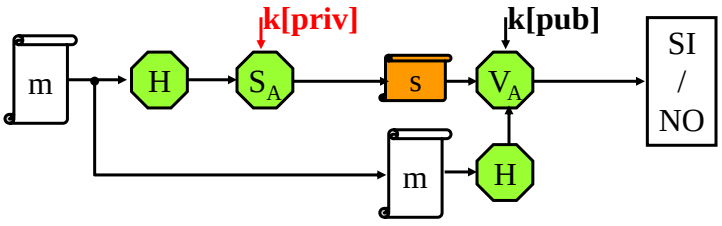
5- rendere **inalterabile** il documento in cui è stata apposta.

Algoritmi di firma a chiave pubblica

Nome	Tipo	Anno
RSA	ricupero	1978
Rabin	ricupero	1979
ElGamal	appendice	1984
DSA	appendice	1991
Schorr	appendice	1991
Nyberg-Rueppel	ricupero	1993

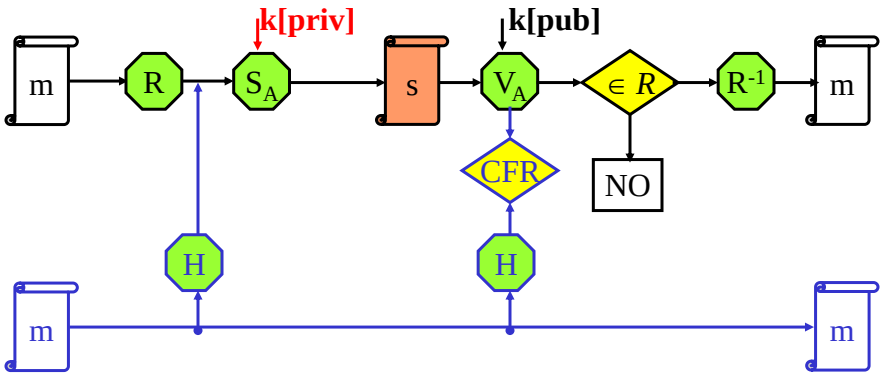
Algoritmi di firma con appendice

Messaggi di lunghezza arbitraria
Appendice: S(H(m),k[privA])



Algoritmi di firma con recupero

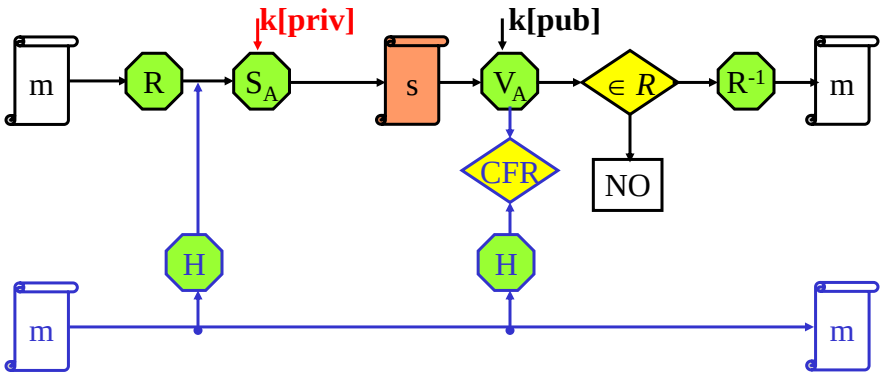
Messaggi "corti": < modulo
Funzione di ridondanza R



N.B. - Gli algoritmi con recupero possono essere impiegati anche in uno **schema con appendice (l'hash ha sicuramente una dimensione inferiore a quella del modulo)**

Algoritmi di firma con recupero

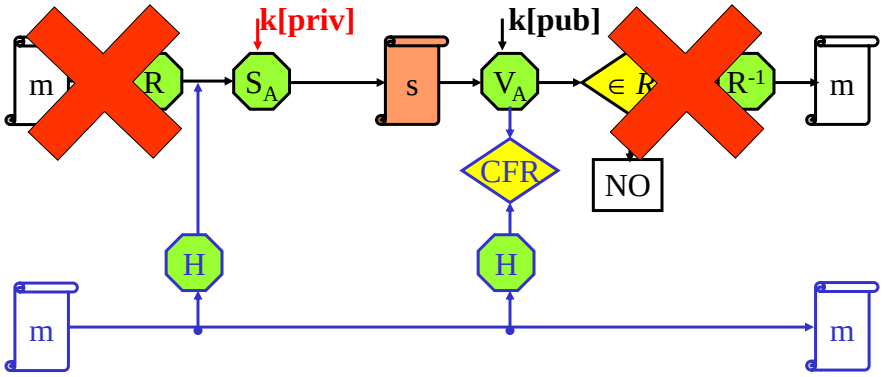
Messaggi "corti": < modulo
Funzione di ridondanza R



N.B. - Gli algoritmi con recupero possono essere impiegati anche in uno **schema con appendice (l'hash ha sicuramente una dimensione inferiore a quella del modulo)**

Algoritmi di firma con recupero

Messaggi "corti": < modulo
Funzione di ridondanza R



N.B. - Gli algoritmi con recupero possono essere impiegati anche in uno **schema con appendice (l'hash ha sicuramente una dimensione inferiore a quella del modulo)**

Proprietà di reversibilità di RSA

Reversibilità delle chiavi (impiego di SU al posto di PU e viceversa)
$E_{SU}(m) = c = m^{SU} \bmod n$ **messaggio non riservato**
$D_{PU}(c) = (m^{SU})^{PU} \bmod n = m$ **ma con origine verificabile**

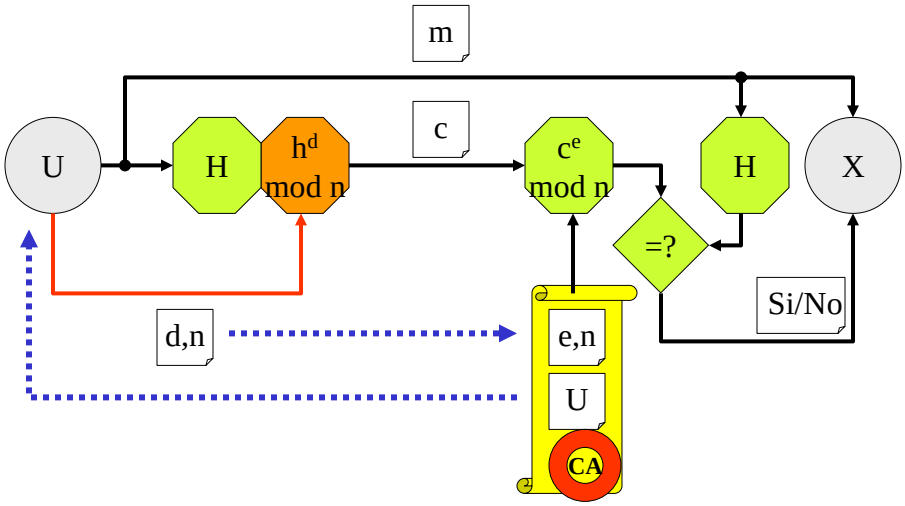
Schema di firma con recupero **inefficiente se m > n e insicura**

$\lceil \log_2 n \rceil$ bit di etichetta
ossia un bit in meno rispetto a n

Schema di firma con appendice:
1. FIRMA
$S_{SU}(H(m)) = (H(m))^{SU} \bmod n$ **autenticazione del messaggio**
$m \| S_{SU}(H(m))$ **comunicazione del messaggio**

2: VERIFICA
- **calcolo di H(m')**
- **calcolo di $H(m) = (S_{SU}(H(m))^{PU} \bmod n$**
- **confronto**

Firma con RSA



Padding

deterministico

PKCS#1: 0x**00** 0x**01** 0x**FF** ...0x**FF** 0x**00**||**H(m)**

FDH: **H(c$_0$.m)|| H(c$_1$.m)|| H(c$_2$.m)||....**

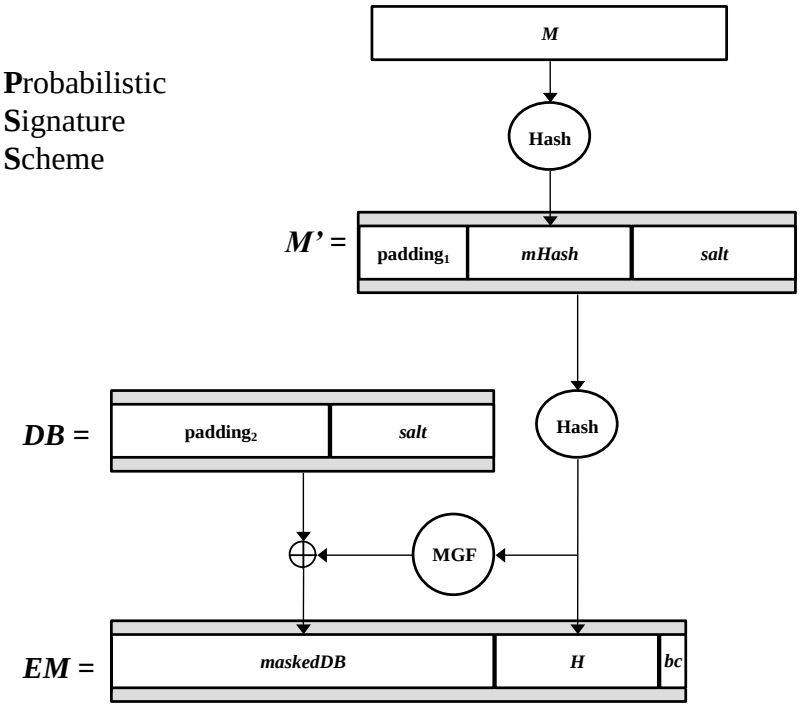
Funzione hash ideale che
genera impronte di ⌈**log2 n**⌉

probabilistico

PKCS#1v2: PPS (Probabilistic Signature Scheme)

"Practical cryptography"

Probabilistic
Signature
Scheme



Proprietà moltiplicativa di RSA

Sia $\mathbf{m} = \mathbf{m_1} \times \mathbf{m_2} < nU$
Firma di **m** da parte di **U**:
$\mathbf{c = m^{dU} \bmod nU = (m_1 \times m_2)^{dU} \bmod nU}$
$\mathbf{= ((m_1^{dU} \bmod nU) \times (m_2^{dU} \bmod nU)) \bmod nU}$

Proprietà moltiplicativa dell'algoritmo RSA:
il testo cifrato (con chiave pubblica o con chiave privata) del prodotto di due testi in chiaro è congruo (mod n) al prodotto dei due testi cifrati

Autenticazione di un messaggio oscurato

X vuole farsi autenticare da T un messaggio m senza che T possa conoscerne il contenuto

Autorizzazioni per voto elettronico, commercio elettronico, ecc.

Autenticazione "a occhi chiusi" di un messaggio **m**

1. **X** sceglie a caso un numero **r coprimo con nT**
2. invia a **T** il testo cifrato **$c1 = m \times r^{eT} \bmod nT$**
3. **T** firma **c1** e restituisce a **X**
   $c2 = m^{dT} \times r^{eT\,dT} \bmod nT = (m^{dT} \times r) \bmod nT$
4. **X** moltiplica **c2** per **r^{-1}**
   $c3 = (m^{dT} \times r \times r^{-1}) \bmod nT = m^{dT} \bmod nU$
5. Il destinatario di **m** può verificare che è autenticato da T
   $(c3)^{eT} \bmod nT = m$

Attacchi Matematici alla Firma

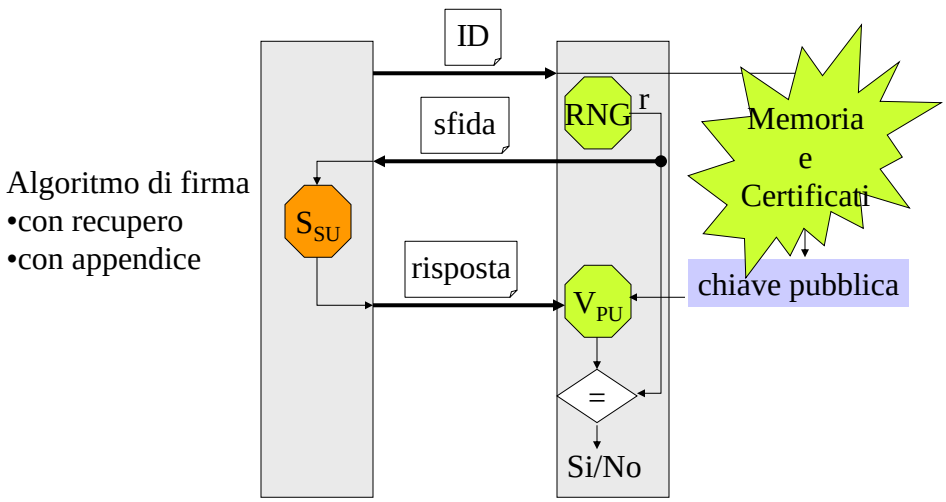
- Un attaccante puo' chiedere di firmare qualunque messaggio di sua scelta tranne m di suo interesse. Per ottenere la firma di m genera r, costruisce m1=m x r, calcola $m2=r^{-1}$ chiede ad X di firmare entrambi i messaggi e moltiplica infine le firme di m1 e m2 che gli vengono restituite

- Posso sfruttare questo attacco per intercettare un cifrato RSA destinato a X, l'intruso oscura c, se lo fa firmare da X, elimina il numero a caso ed ottiene il testo in chiaro

Identificazione attiva

Identificazione con C/R

Identificando Verificatore



Algoritmo di firma
•con recupero
•con appendice

Identificazione unilaterale

1 - A ← B: RB

2 - A → B: c = S_{SA}(RB)

3 - V_{PA}(c) = RB ?

E se RB testo cifrato intercettato?

E se RB fosse un contratto?

Attacco con testo scelto

2 - A → B: RA||S_{SA} (RA||RB)

Attacco dell'uomo in mezzo

2 - A → B: CERT(PA,T)||RA||S_{SA}(RA||RB)

Il problema dei GM degli scacchi

2 - A → B: CERT(PA,T)||RA||B||S_{SA}(RA||RB||B)

τ τ

Identificazione reciproca

1 - A ← B: τB1

2 - A → B: CERT(PA,T)|| τA||B||S_{SA}(τA||τB1||B)

3 - A ← B: CERT(PB,T')|| τB2||S_{SB}(τB2|| τA||A)