Capitolo 2
Codifica binaria dell'informazione

2.1 Rappresentazione

Alfabeti e simboli

La rappresentazione dell'informazione

Informazione - **Stringa** di lunghezza finita formata da simboli s_i appartenenti ad un **alfabeto** di definizione A:

$s_1\, s_2\, s_3 \ldots .\, s_i \ldots \ldots s_{n-1}\, s_n$ con $s_i \in A: \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$

Esempi:

"testo" e caratteri

"numero" e cifre

"musica" e note

"immagine", pixel e toni di grigio

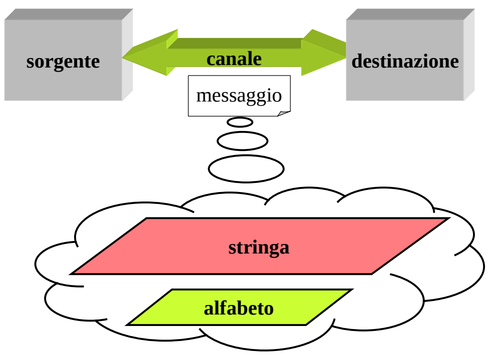
"disegno" e pend./lung. di tratti

"misura" e posizione di un indice

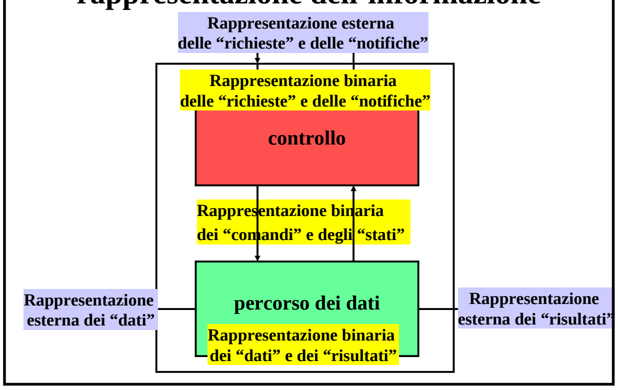
"parlato" e fonemi

Simboli di informazione - Variabili a cui può essere assegnato come valore uno qualsiasi degli elementi dell'alfabeto A

Il modello



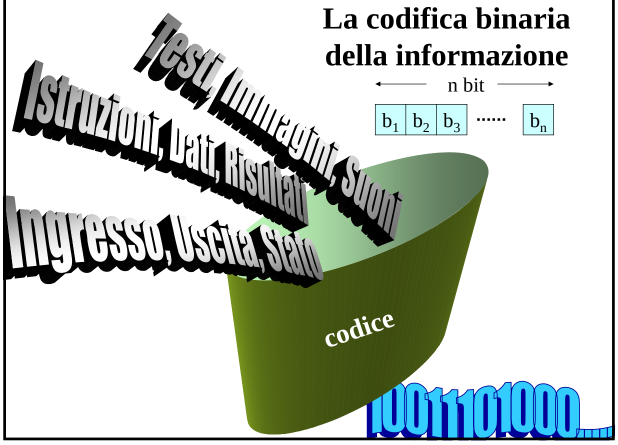
Macchine digitali e rappresentazione dell'informazione



La codifica binaria della informazione

n bit

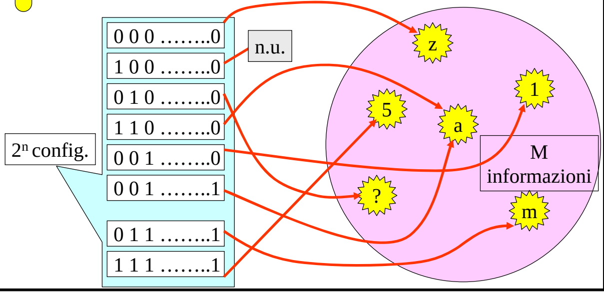
b_1	b_2	b_3	......	b_n



Codici binari

Codice binario

Codice binario - Funzione dall'insieme delle 2^n configurazioni di n bit ad un insieme di M informazioni (*simboli alfanumerici, colori, eventi, stati interni*, ecc.).
Condizione necessaria per la codifica: $2^n \geq M$



Proprietà di un codice

Il codice è una rappresentazione convenzionale dell'informazione.

La scelta di un codice è condivisa da sorgente e destinazione ed ha due gradi di libertà:

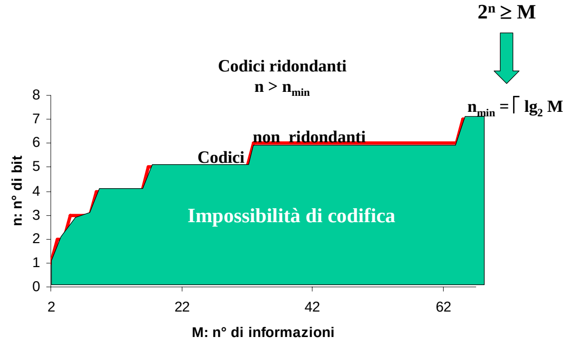
- **il numero di bit (qualsiasi, a patto che sia $2^n \geq M$)**
- **l'associazione tra configurazioni e informazioni**

A parità di n e di M le associazioni possibili sono

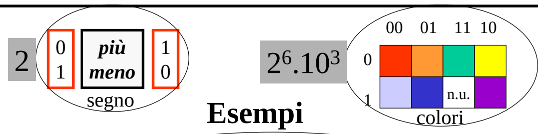
$$C = 2^n! / (2^n - M)!$$

n = 1, M = 2	C = 2
n = 2, M = 4	C = 24
n = 3, M = 8	C = 64.320
n = 4, M = 10	C = 29.000.000.000

Codici ridondanti e non ridondanti



Esempi

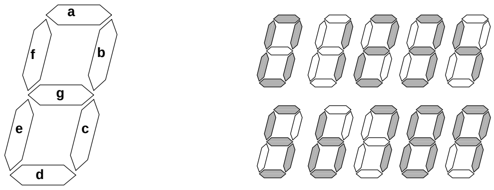


Cifre decimali

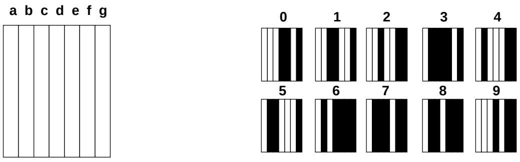
Altri 29 miliardi di codici a 4 bit	BCD		7 segmenti	uno su dieci
	0000	*zero*	1111110	1000000000
	0001	*uno*	0110000	0100000000
	0010	*due*	1101101	0010000000
	0011	*tre*	1111001	0001000000
	0100	*quattro*	0110011	0000100000
	0101	*cinque*	1011011	0000010000
	0110	*sei*	0011111	0000001000
	0111	*sette*	1110000	0000000100
	1000	*otto*	1111111	0000000010
	1001	*nove*	1110011	0000000001

N.B. 1= acceso

Codice a 7 segmenti

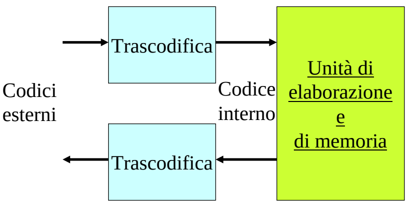


Universal Product Code



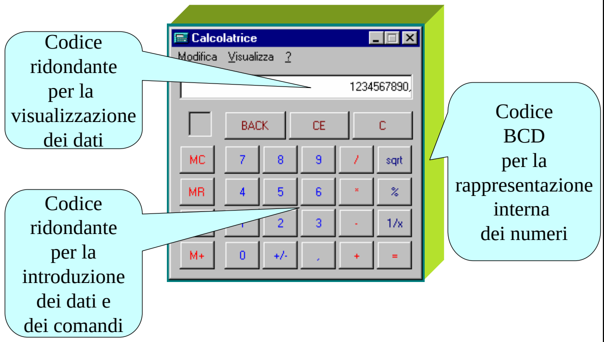
Trascodifica

La trascodifica sul percorso dei dati

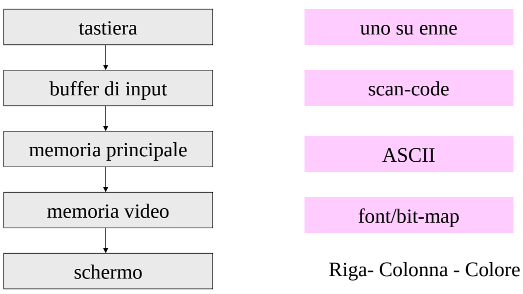


Il codice interno è di norma non ridondante per minimizzare il n° di bit da elaborare e da memorizzare.
Il codice esterno è di norma ridondante, per semplificare la generazione e la interpretazione delle informazioni, e standard, per rendere possibile la connessione di macchine (o unità di I/O) fatte da Costruttori diversi.

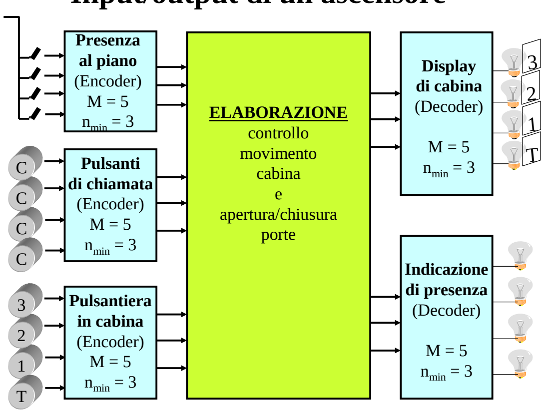
La calcolatrice tascabile



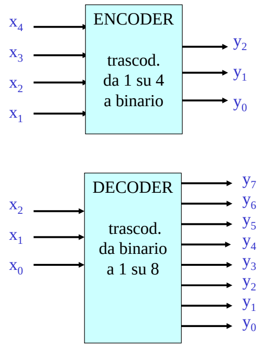
Esempio : un editor



Input/output di un ascensore



Le due trascodifiche



x_4	x_3	x_2	x_1	y_2	y_1	y_0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0

x_2	x_1	x_0	y_7	y_6	y_5	y_4	y_3	y_2	y_1	y_0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

Codici proprietari e standard

Codice proprietario - Codice fissato da un Costruttore per mettere in comunicazione apparati da lui realizzati
- L'uso di codici proprietari ottimizza le prestazioni e protegge il mercato di certe apparecchiature.

Esempi: Linguaggio Assembler, Periferiche, Telecomando TV

Codice standard - Codice fissato da norme internazionali (***de iure***) o dal costruttore di una macchina utile per tutti gli altri (***de facto***).
- L'uso di codici standard nelle unità di I/O consente di collegare macchine fatte da costruttori diversi

Esempi: Stampanti e Calcolatori, Calcolatori e Calcolatori

La codifica Morse

	t_0	t_1	t_2	t_3
E	●			
T	–			
A	●	–		
I	●	●		
N	–	●		
M	–	–		
O	–	–	–	
S	●	●	●	
R	●	–	●	
G	–	–	●	
W	●	–	–	
U	●	●	–	
K	–	●	–	

	t_0	t_1	t_2	t_3
D	–	●	●	
F	●	●	–	●
H	●	●	●	●
B	–	●	●	●
X	–	●	●	–
V	●	●	●	–
C	–	●	–	●
Y	–	●	–	–
L	●	–	●	●
J	●	–	–	–
Z	–	–	●	●
Q	–	–	●	–
P	●	–	–	●

Caratteristiche:
- Lunghezza variabile
- Stringhe separate da pause

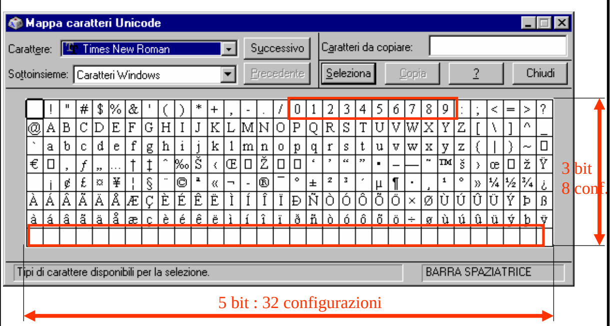
- Efficiente per l'uso da parte di operatori umani
- Difficoltoso il progetto di ricetrasmettitori automatici

Stringhe di uguale lunghezza (Baudot: 5 bit)

I 96 simboli di "testo" (ASCII a 7 bit)

	000	001	010	011	100	101	110	111
0000	caratteri di controllo		SP	0	@	P	`	p
0001			!	1	A	Q	a	q
0010			"	2	B	R	b	r
0011			#	3	C	S	c	s
0100			$	4	D	T	d	t
0101			%	5	E	U	e	u
0110			&	6	F	V	f	v
0111			'	7	G	W	g	w
1000			(	8	H	X	h	x
1001			)	9	I	Y	i	y
1010			*	:	J	Z	j	z
1011			+	;	K	[	k	{
1100			,	<	L	\	l	|
1101			-	=	M	]	m	}
1110			.	>	N	^	n	~
1111			/	?	O	_	o	DEL

Codice ASCII esteso (8 bit)

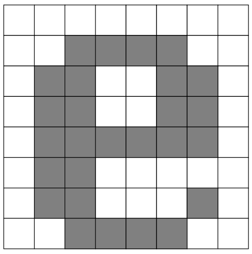


N.B. - Lo standard Unicode (16 bit) consente di rappresentare diversi sottoinsiemi di caratteri.

Bit map: un codice d'uscita ridondante per simboli alfanumerici

Stampanti ad impatto: ASCII

Stampanti laser, a getto, monitor: BITMAP



Matrice di pixel: ad es. 8x8

Bianco/nero: 1 pixel, 1 bit

Tonalità: 1 pixel, 8 bit

Colori RGB: 1 pixel, 24 bit

Font

2.3 La codifica dei numeri

Rappresentazione dei numeri

- Esterna: BCD, ASCII, Unicode
- Interna: Sistema di numerazione in base 2

Numeri in base B

1) Rappresentazione:

$a_{n-1} \dots\dots a_0 , a_{-1} \dots\dots a_{-m}$

$a_i \in \{0, 1, \dots, (B-1)\}$

2) Valore:

$(N)_B = (a_{n-1} .B^{n-1} + \dots + a_0 .B^0 + a_{-1} .B^{-1} + a_{-2} .B^{-2} + \dots a_{-m} .B^{-m})$

Il sistema di numerazione in base 2 (il caso dei numeri naturali < 2^n)

n bit

b_{n-1} b_{n-2} ...... b_1 b_0

$(N)_2 = b_{n-1} .2^{n-1} + b_{n-2} .2^{n-2} + \dots + b_0 .2^0$

N_{10}	N_2	N_{10}	N_2
0	0000	8	1000
1	0001	9	1001
2	0010	10	1010
3	0011	11	1011
4	0100	12	1100
5	0101	13	1101
6	0110	14	1110
7	0111	15	1111

Lunghezza della stringa in base 2 e in base 10

Dato un numero decimale con m cifre

$$0 \le (N)_{10} \le 10^m - 1$$

per la sua rappresentazione binaria deve essere $2^n > 10^m$ e quindi

$$n = \lceil(m \times \log_2 10) \approx \lceil(3,32\ m)$$

Conversione di base

Conversioni da base 2 a base 10 e viceversa di numeri naturali

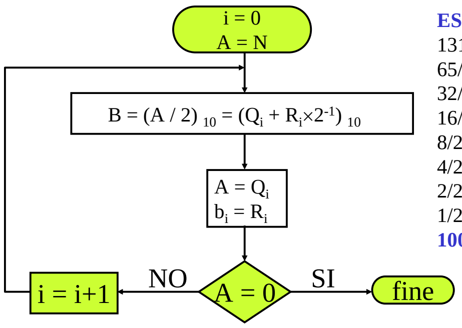
ESEMPIO: 100110

0 +
2 +
4 +
0 +
0 +
32 =
38

Conversione da base 2 a base 10
$(N)_{10} = (b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + b_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + b_1 \cdot 2^1 + b_0 \cdot 2^0)_{10}$

Conversione da base 10 a base 2
Osservazione preliminare:
$(N)_{10} = (b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + b_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + b_1 \cdot 2^1 + b_0 \cdot 2^0)_{10}$
$(N)_{10}/2 = \underbrace{(b_{n-1} \cdot 2^{n-2} + b_{n-2} \cdot 2^{n-3} + \dots + b_1 \cdot 2^0)}_{Q} + \underbrace{b_0}_{R} =)_{10}$

Conversione di un numero naturale N da base 10 a base 2



ESEMPIO: 131
131/2 = 65 + 1.0,5
65/2 = 32 + 1.0,5
32/2 = 16 + 0
16/2 = 8 + 0
8/2 = 4 + 0
4/2 = 2 + 0
2/2 = 1 + 0
1/2 = 0 + 1.0,5
10000011

Altre rappresentazioni di numeri binari

- **Sistema esadecimale**: B =16
  cifre: 0,1,..,9,a,b,c,d,e,f
  codice binario: 0 = 0000, 1 = 0001, …, f = 1111
  n° di bit per cifra: 4

ESEMPIO: 11000100 → 1100-0100 → C4

- **Sistema ottale**: B = 8,
  cifre: 0, 1, …,7
  codice OCTAL: 0 = 000, …, 7 = 111
  n° di bit per cifra: 3

ESEMPIO: 11000100 → 11-000-100 → 304

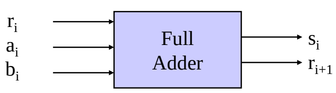
Operazioni aritmetiche

Addizione (con riporto)

0+0 = 00
0+1 = 01
1+0 = 01
1+1 = 10

riporto
carry

r_n	r_{n-1}	r_{n-2}	……	r_1	**0**	
	a_{n-1}	a_{n-2}	……	a_1	a_0	+
	b_{n-1}	b_{n-2}	……	b_1	b_0	
s_n	s_{n-1}	s_{n-2}	……	s_1	s_0	



r_i a_i b_i	r_{i+1}	s_i
0 0 0	0	0
0 0 1	0	1
0 1 0	0	1
0 1 1	1	0
1 0 0	0	1
1 0 1	1	0
1 1 0	1	0
1 1 1	1	1

Sottrazione (con prestito)

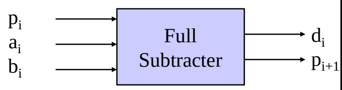
0-0 = 0
0-1 = n.a.
1-0 = 1
1-1 = 0

00-0 = 0
10-1 = 1
01-0 = 1
01-1 = 0

prestito o borrow

p_n	p_{n-1}	p_{n-2}	……	p_1	**0**	
0	a_{n-1}	a_{n-2}	……	a_1	a_0	-
0	b_{n-1}	b_{n-2}	……	b_1	b_0	
d_n	d_{n-1}	d_{n-2}	……	d_1	d_0	

se 1, la differenza è negativa



p_i a_i b_i	p_{i+1}	d_i
0 0 0	0	0
0 0 1	1	1
0 1 0	0	1
0 1 1	0	0
1 0 0	1	1
1 0 1	1	0
1 1 0	0	0
1 1 1	1	1

Moltiplicazione

0.0 = 0
0.1 = 0
1.0 = 0
1.1 = 1

$P = Y.X$
$= Y.(x_{n-1}.2^{n-1} + \dots + x_1.2^1 + x_0.2^0)$
$= (Y.x_{n-1}).2^{n-1} + \dots + (Y.x_1).2^1 + (Y.x_0).2^0$
$= P_{n-1}.2^{n-1} + \dots + P_1.2^1 + P_0.2^0$

$P_i = (Y.x_i) = (y_{n-1} \cdot x_i).2^{n-1} + \dots + (y_0 \cdot x_i).2^0$

Moltiplicazione (shift and add)

				y_3	y_2	y_1	y_0	×
				x_3	x_2	x_1	x_0	
				x_0y_3	x_0y_2	x_0y_1	x_0y_0	+
			x_1y_3	x_1y_2	x_1y_1	x_1y_0	0	+
		x_2y_3	x_2y_2	x_2y_1	x_2y_0	0	0	+
	x_3y_3	x_3y_2	x_3y_1	x_3y_0	0	0	0	+
p_7	p_6	p_5	p_4	p_3	p_2	p_1	p_0	

Rappresentazione dei numeri razionali

- Come coppia di interi (più un bit per il segno)

	i_n	i_{n-1}	...	i_0	f_1	f_2	...	f_n
s	i_n	i_{n-1}	...	i_0	f_1	f_2	...	f_n

- Notazione *scientifica*

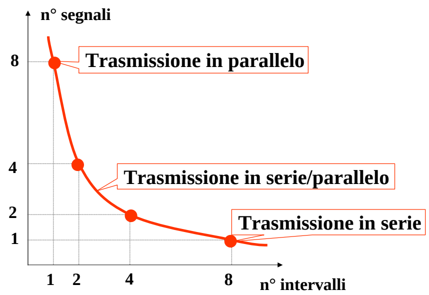
s	m_n	m_{n-1}	...	m_0	s	e_n	e_{n-1}	...	e_0

2.4 Trasmissione

Modalità

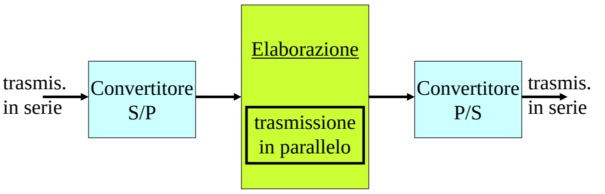
Modalità di trasmissione dei bit: compromesso spazio/tempo

Es.: Codice a 8 bit



Esempio: processori Intel

Modalità di trasmissione dei bit: le unità di conversioni S/P e P/S

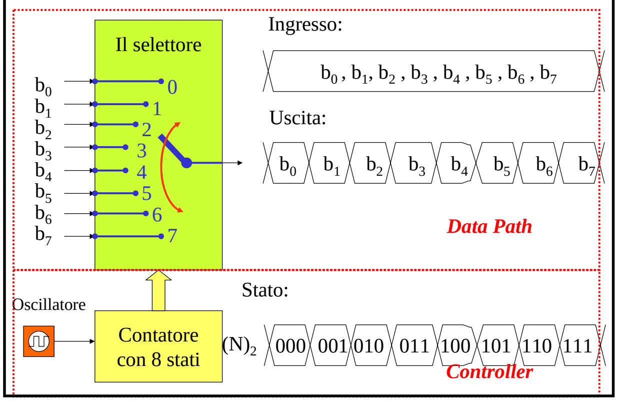


La modalità di trasmissione all'interno della macchina è di norma **in parallelo** (per massimizzare la velocità di elaborazione)

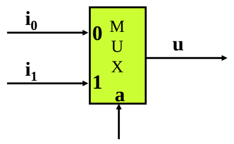
La modalità di trasmissione all'esterno della macchina è di norma **in serie** (per minimizzare la complessità del supporto fisico)

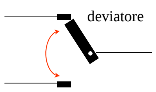
Esempi: interfaccia di tastiera, interfaccia video

La conversione P/S di un byte



La serializzazione di due bit

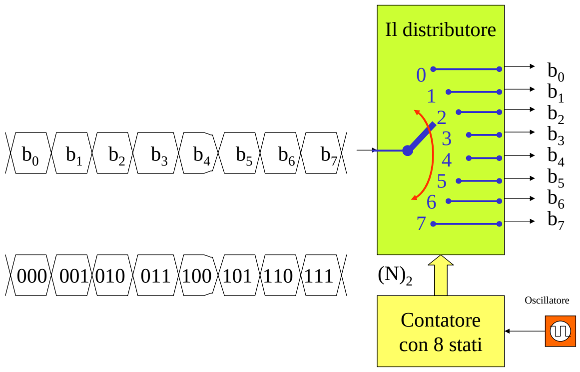




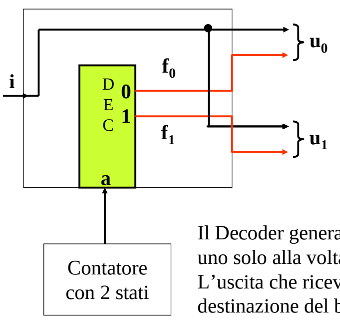
a	i_0	i_1	u
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

se **a=0** ***allora*** **u=i_0**
altrimenti **u=i_1**

Conversione S/P di un byte

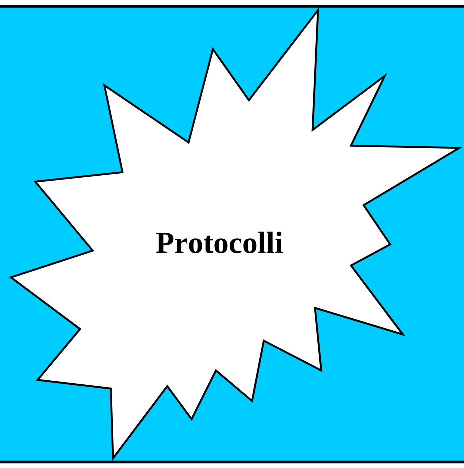


La distribuzione di due bit

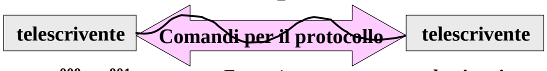


a	f_0	f_1
0	1	0
1	0	1

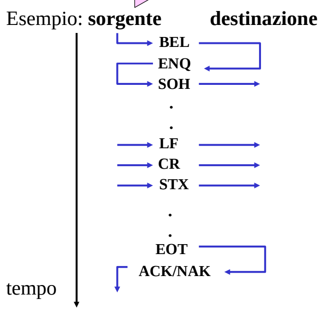
Il Decoder genera **2** "flag di validità", di cui uno solo alla volta ha valore 1.
L'uscita che riceve tale valore è la destinazione del bit d'ingresso **i**



Modalità di controllo (ASCII a 7 bit) : codifica dei comandi e protocollo di scambio



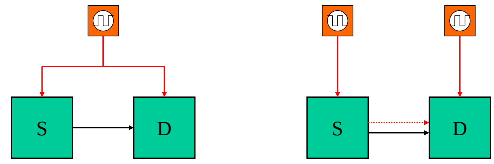
	000	001
0000	NUL	DLE
0001	SOH	DC1
0010	STX	DC2
0011	ETX	DC3
0100	EOT	DC4
0101	ENQ	NAK
0110	ACK	SYN
0111	BEL	ETB
1000	BS	CAN
1001	HT	EM
1010	LF	SUB
1011	VT	ESC
1100	FF	FS
1101	CR	GS
1110	SO	RS
1111	SI	US



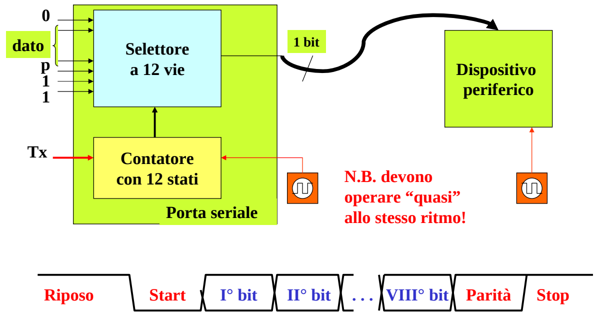
Sincronizzazione

La destinazione deve sapere in quali istanti di tempo i valori presenti sul canale sono significativi.
Si hanno due casi:

"accoppiamento stretto" ***"accoppiamento lasco"***



Comunicazione asincrona di un byte: il protocollo RS232



Disturbi e Guasti

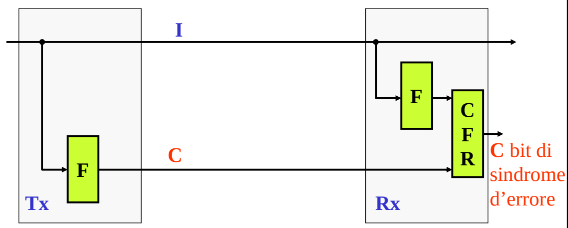
- *linea di trasmissione*
- *unità di memoria*

Obiettivo: riconoscere alla destinazione le configurazioni modificate.
Condizione necessaria: **il codice deve essere ridondante**
- se arriva una configurazione "non utilizzata" la destinazione ha la **certezza** della sua non integrità;
- se arriva una configurazione "utilizzata" la destinazione ha solo una certa **probabilità** che sia integra.

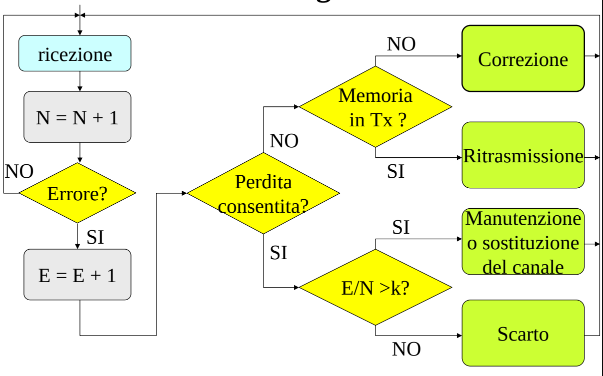
Ulteriore condizione - Le configurazioni non utilizzate devono essere le modifiche più probabili delle configurazioni utilizzate.

Codici separabili: rilevazione di errori

bit di informazione (*information bits*)	bit di controllo (*check bits*)



Gestione degli errori



Codici con rilevazione di errori

L'ipotesi degli errori indipendenti

Consideriamo una stringa di ***n*** bit e supponiamo che l'evento di modifica di un bit (o *errore*) da parte di un disturbo
a) sia indipendente dalla posizione del bit nella stringa;
b) si verifichi con probabilità pari a ***p*** *(tasso di errore)*.
La probabilità che la stringa ricevuta contenga ***e*** errori è data da:

$$P_e = \binom{n}{e} \cdot p^e \cdot (1-p)^{n-e}$$

Esempio:
p = 1 %
N.B. molto alto!

n	P_0	P_1	P_2	P_3
8	*92,27 %*	*7,46 %*	*0,26 %*	*0,005 %*
16	*85.14 %*	*13,76 %*	*1,04 %*	*0,049 %*

Per n = 8 le modifiche più probabili riguardano un solo bit
Per n = 16 le modifiche più probabili riguardano uno o due bit

Distanza minima di un codice

<u>Distanza fra due configurazioni binarie di n bit:</u> D(A,B) - Numero di bit omologhi che hanno valore diverso.

Esempi: D(100,101) = 1; D(011,000) = 2; D(010,101) = 3

<u>Distanza minima di un Codice C:</u> DMIN (C) - Valore minimo della distanza tra due qualsiasi delle configurazioni utilizzate.

Esempi: DMIN (Codice ASCII) = 1; DMIN (Codice semaforo) = 2

- **I codice non ridondanti hanno DMIN=1.**
- **I codice ridondanti possono avere DMIN > 1.**

Esempio: DMIN (UPC) = 2

Distanza minima e rilevazione degli errori

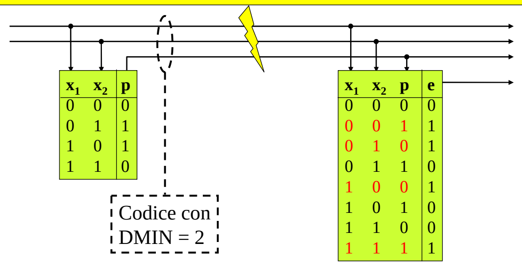
- Un codice per la rilevazione di tutti i possibili errori singoli, o **SEDC (<u>S</u>ingle <u>E</u>rror <u>D</u>etection <u>C</u>ode)**, deve <u>non</u> utilizzare tutte le configurazioni che distano "uno" da ciascuna delle configurazioni utilizzate.

Un codice SED deve dunque avere almeno **DMIN = 2** .

- Un codice per la rilevazione di modifiche su k bit deve avere almeno **DMIN = k+1** .

Il bit di parità : una semplice modalità per ottenere la rilevazione di errori singoli

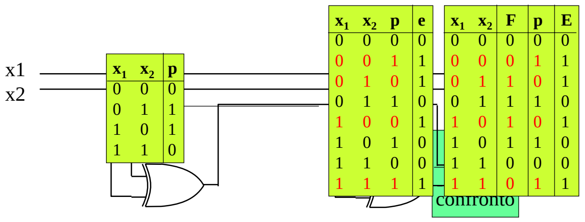
<u>Bit di parità</u> **p** - bit che la sorgente aggiunge ad una stringa di bit di codifica al fine di renderne **pari** il n° di "uni".
<u>Errore di parità</u> **e** - bit che la destinazione pone a 1 se e solo se riceve una configurazione con un numero **dispari** di "uni".



x_1	x_2	p
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

x_1	x_2	p	e
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Calcolo del bit di parità



x_1	x_2	p
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

x_1	x_2	p	e
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

x_1	x_2	F	p	E
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1

p = F(x1, x2)

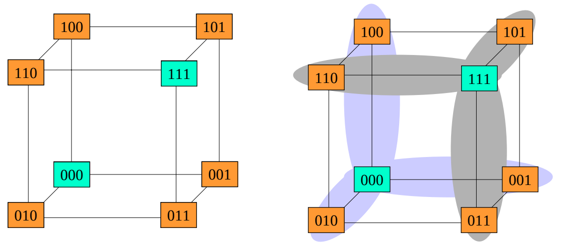
e = E(x1, x2, p)

= F(F(x1, x2), p)

- Funzione composta
- Disposizione in serie

Codici con correzione di errori

La correzione di errori singoli (esempio)



Tx trasmette o NO = 000 o SI = 111

Se P_1>> P_2 ogni configurazione errata può essere corretta

A causa dei disturbi Rx può ricevere una terna qualsiasi

Distanza minima e correzione degli errori

Il codice dell'esempio precedente ha DMIN=3.

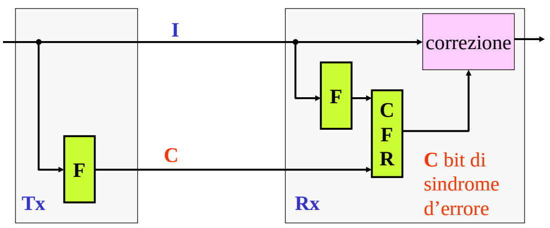
- Ogni **SECC** (<u>S</u>ingle <u>E</u>rror <u>C</u>orrection <u>C</u>ode) deve avere **DMIN ≥ 3**.

- Un codice con **DMIN = 2k+1** rileva **2k** errori e può correggerne fino a **k** .

Di solito <u>si corregge un solo bit</u> e si usa la ridondanza introdotta per valutare la "qualità" del canale (manutenzione/sostituzione)

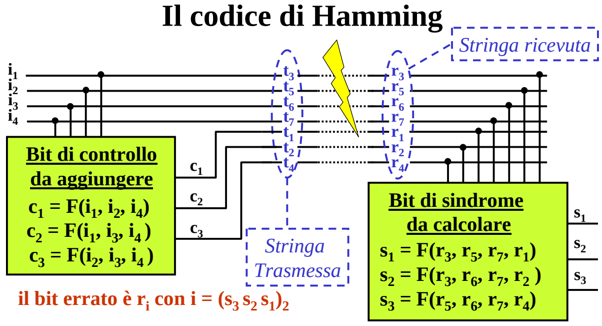
Codici separabili: correzione di errori

Hamming (Bell Labs, 1950) ha dimostrato che per correggere gli errori singoli su informazioni codificate con **I** bit occorrono **C** bit di controllo tali che **$2^C \geq I + C + 1$** .



Le 2^C configurazioni delle **sindromi di errore** devono indicare se non c'è errore (1 situazione) e se c'è, dov'è (I + C situazioni).

Il codice di Hamming



il bit errato è r_i con $i = (s_3 s_2 s_1)_2$

ES.: **I = 0001** — **c_1 = 1**, **c_2 = 1**, **c_3 = 1**

R=0011 — **s_1 = 0**, **s_2 = 1**, **s_3 = 1**