Funzioni e Ricorsione

- La ricorsione consiste nella possibilità di *definire una funzione in termini di se stessa*
- È basata sul *principio di induzione* matematica:
  - se una proprietà P vale per $n=n_0$
  - e si può provare che, *assumendola valida per n*, allora vale per n+1

  allora P vale per ogni $n \geq n_0$

1

Ricorsione

- Operativamente occorre:
  - identificare un "**caso base**" la cui soluzione sia "ovvia"
  - riuscire a **esprimere la soluzione al caso generico *n*** in termini dello *stesso problema in uno o più casi più semplici* (n-1, n-2, etc).

2

Ricorsione – Esercizi

- Esprimere la soluzione di problemi per via funzionale tramite la ricorsione

1. Calcolo della funzione H(n) = $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

   H(n) = 1 + 1/2 + 1/3 + … + 1/n
2. Calcolo della potenza k-esima

   b^k con $b \in Z$, $k \geq 0$
3. Calcolo del valore di un polinomio di grado n a coefficienti unitari

   $P(x,n) = x^0 + x^1 + \ldots x^n$

3

Funzione H(n)

- H: N → R (int → double)

  H(n) = 1 + 1/2 +1/3 + ... + 1/n
- **Per n>1** la funzione si riscrive come:

  H(n) = (1 + 1/2 +1/3 + ... + 1/(n-1)) **+ 1/n**

  ossia come

  H(n) = H(n-1) + 1/n

  mentre, ovviamente, H(1)=1

4

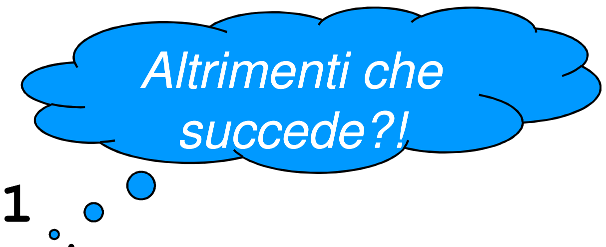
Funzione H(n)

- Dunque,

  H(n) = 1 per n = 1

  H(n) = 1/n + H(n-1) per n > 1

```
double H(int n)
{
    return (n == 1) ? 1
                    : 1.0/n + H(n-1);
}
```



Potenza k-esima

- **b^k con $b \in Z$, $k \geq 0$**

- **power**: $R \times N \rightarrow R$ (double×int → double)

  $b^k = 1$ per $k = 0$

  $b^k = b * b^{k-1}$ per $k > 0$

- da cui:

```
double power(double b, int k)
{
  return (k == 0) ? 1 : b * power(b, k-1);
}
```

Polinomio

- Calcolo del valore di un polinomio di grado n≥0 *a coefficienti unitari*

  $P(x, n) = x^0 + x^1 + \dots x^n$

- **Per n>0** P(x, n) si riscrive come:

  $P(x, n) = (x^0 + x^1 + \dots x^{n-1}) \mathbf{+ x^n}$

  ossia come

  $P(x, n) = P(x, n-1) + x^n$

  mentre, ovviamente, $P(x, 0) = 1$

7

Polinomio

- Dunque,

  pol(x, n) = 1 per n=0

  pol(x, n) = x^n + pol(x, n-1) per n>0

- da cui...
  1. La funzione **`pol`** accetta un **`double`** (**`x`**) ed un **`int`** (**`n`**)
  2. Se n è uguale a zero, restituire **`n`**...
  3. ...altrimenti restituire la somma di x^n – **`power(x, n)`** – del risultato della funzione **`pol`** stessa invocata con i valori **`x`** e **`n-1`**

8

Polinomio

```
double pol(double x, int n)
{
    return (n==0) ? 1
      : power(x,n) + pol(x, n-1);
}
```

9

Massimo Comun Divisore

- Trovare il massimo comun divisore tra due numeri N e M

$$\mathbf{MCD(m, n)} = \begin{cases} \mathbf{m,} & \mathbf{se\ m=n} \\ \mathbf{MCD(m\text{-}n, n),} & \mathbf{se\ m>n} \\ \mathbf{MCD(m, n\text{-}m),} & \mathbf{se\ m<n} \end{cases}$$

10

Massimo Comun Divisore

Codifica

```
int mcd(int m, int n)
{
  if(m == n)
     return m;
  else
     return (m > n) ? mcd(m-n, n) :
                      mcd(m, n-m);
}
```

11

Massimo Comun Divisore... ?!

- Il risultato viene sintetizzato via via che le chiamate si aprono, *"in avanti"*
- Quando le chiamate si chiudono non si fa altro che riportare indietro, fino al cliente, il risultato ottenuto

→ La ricorsione di questo tipo viene detta *Tail Recursion*!

12

Massimo Comun Divisore... ?!

- La soluzione individuata per l'MCD è *sintatticamente ricorsiva...*
- *...*ma dà luogo ad un processo computazionale *iterativo,* quindi ad un tipo di ricorsione *tail*!
- ...è tutta colpa dell'algoritmo...

13

Massimo Comun Divisore: versione iterativa

- Identici parametri d'ingresso (ovviamente)
- Si itera finché n != m; se i due valori sono uguali, l'MCD è il valore comune
  - Se m > n si assegna ad m il valore m – n
  - Altrimenti si assegna ad n il valore n – m

14

Massimo Comun Divisore: versione iterativa

```
int mcd(int n, int m)
{
  int a, b;
  a = n; b = m;
  while (a != b)
  {
      if (b > a)
            b = b - a;
      else
            a = a - b;
  }
  return a;
}
```

15

Massimo Comun Divisore: metodo di Euclide

```
int massimoComunDivisore (int n1, int n2)
{
   int resto, a, b;
   if (n1 > n2)
   {
       a = n1;  b = n2;
   }
   else
   {
       a = n2;  b = n1;
   }
   while (b > 0)
   {
       resto = a % b;
       a = b;
       b = resto;
   }
   return a;
}
```

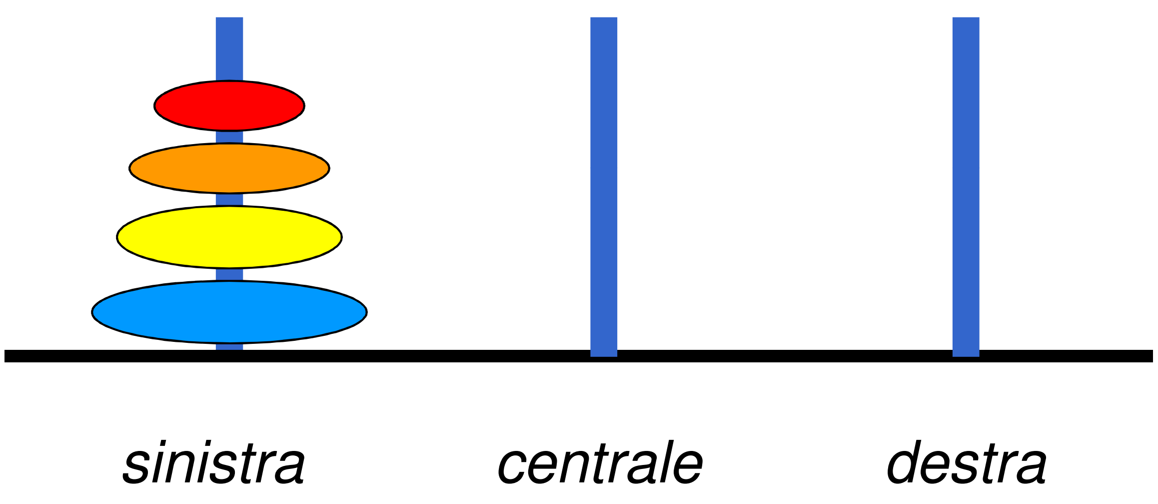
16

La torre di Hanoi

- *Sono date tre torri (sinistra, centrale, e destra) e un certo numero N di dischi forati*
- *I dischi hanno diametro diverso gli uni dagli altri, e inizialmente sono infilati uno sull'altro (dal basso in alto) dal più grande al più piccolo sulla torre di sinistra*
- Scopo del gioco è *portare tutti e dischi dalla torre di sinistra alla torre di destra*, rispettando due regole:
  a) si può muovere un solo disco alla volta;
  b) un disco grande non può mai stare sopra un disco più piccolo.

17

La torre di Hanoi



18

La torre di Hanoi

Come risolvere il problema?

- E' impensabile immaginare la serie di mosse che risolve il problema in generale
- E' abbastanza semplice esprimere una soluzione ricorsiva

Ipotesi:

- E' facile spostare un <u>singolo disco</u> tra due torri a scelta.

19

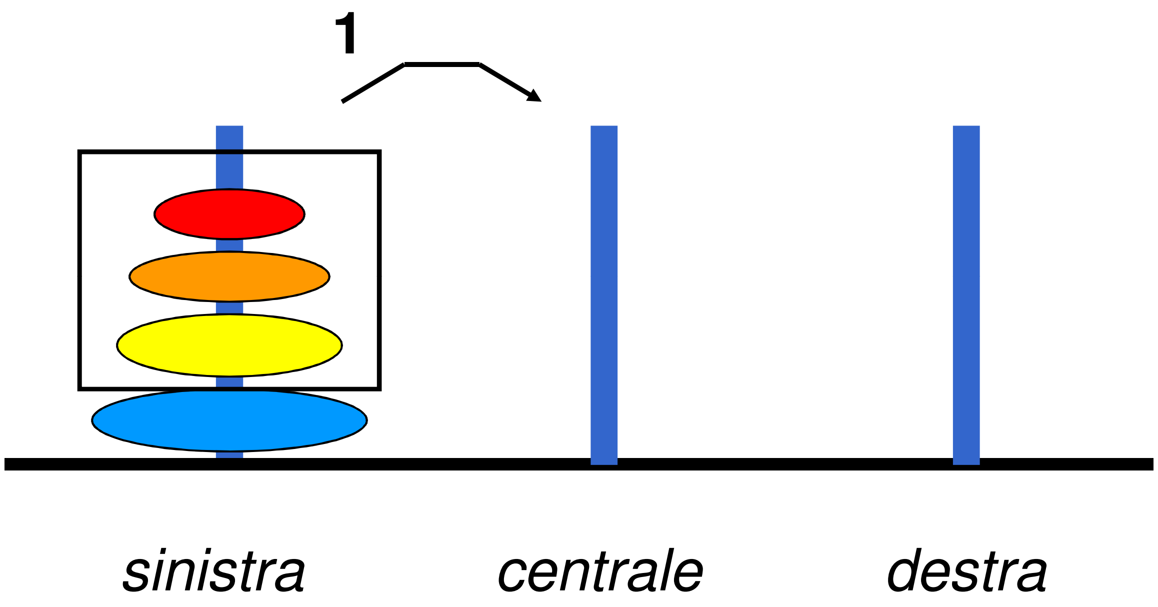
La torre di Hanoi

Soluzione ricorsiva

- *<u>Caso banale</u>*: un singolo disco si sposta direttamente dalla torre iniziale a quella finale
- Caso generale: per spostare N dischi dalla torre iniziale a quella finale occorre
  - spostare N-1 dischi dalla torre iniziale a quella intermedia, che funge da appoggio
  - spostare il disco rimanente (il più grande) direttamente dalla torre iniziale a quella finale
  - spostare gli N-1 dischi "posteggiati" sulla torre intermedia dalla torre intermedia a quella finale

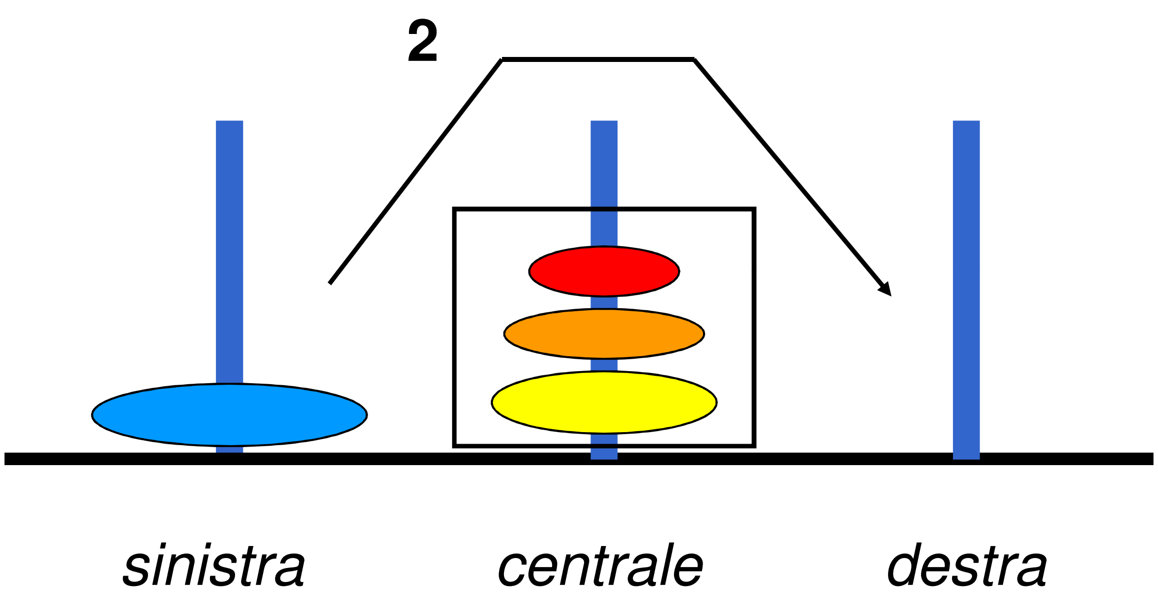
20

La torre di Hanoi



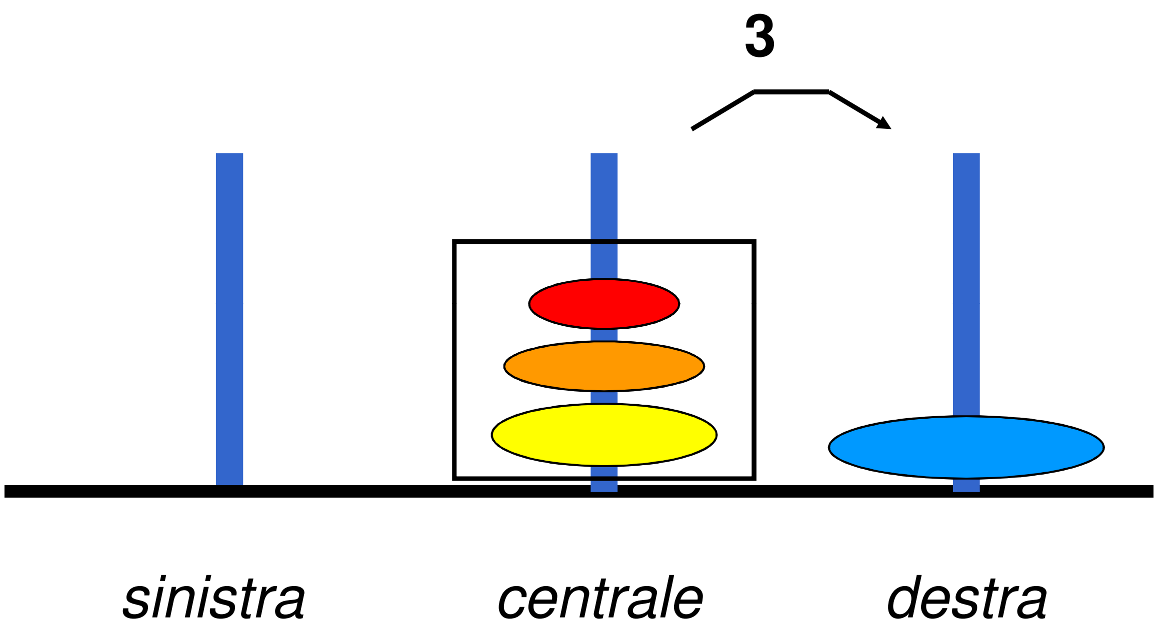
21

La torre di Hanoi



22

La torre di Hanoi



23

La torre di Hanoi

- Notare che:
  - È possibile usare come torre di transito una torre dove ci siano dischi più grandi di quelli da spostare...

24

La torre di Hanoi

La soluzione delineata per il caso "N dischi" presuppone

- di sapere spostare N-1 dischi
  → ***stesso problema in un caso più semplice***
- di sapere spostare un singolo disco
  → ***abilità che si possiede per ipotesi.***

È una ricorsione <u>*non lineare*</u>

- il problema con N dischi si esplode in <u>due</u> sottoproblemi con N-1 dischi
- con N dischi, 2^N-1 attivazioni della funzione.

25

La torre di Hanoi

Specifica

- rappresentiamo le tre torri con un intero
- rappresentiamo ogni mossa tramite la coppia di torri coinvolte (in futuro le scriveremo sull'output)
- la funzione **`hanoi`** ha come parametri
  - il numero di dischi (**`d`**) da spostare
  - la torre **`iniziale`**
  - la torre **`finale`**
  - la torre da usare come appoggio (**`transito`**)
- non ha tipo di ritorno, è una procedura → **`void`**

26

La torre di Hanoi

Pseudocodifica

1. Se c'è un solo disco da trasferire, trasferirlo direttamente dalla torre **`iniziale`** a quella **`finale`** e terminare, altrimenti...
2. ...trasferire **`d-1`** dischi dalla torre **`iniziale`** alla torre di **`transito`**
3. Trasferire un disco dalla torre **`iniziale`** alla torre **`finale`**
4. Trasferire **`d-1`** dischi dalla torre di **`transito`** alla torre **`finale`**

27

La torre di Hanoi

Interfaccia (header file)

```
void hanoi(int dischi,
  int torreIniziale, int torreFinale,
  int torreTransito);
```

28

La torre di Hanoi

```
void hanoi(int d, int iniziale, int finale,
  int transito)
{
  if (d==1)
  {
     printf("Muovi un disco dalla torre %d "
       "alla torre %d\n", iniziale, finale);
  }
  else
  {
     hanoi(d-1, iniziale, transito, finale);
     printf("Muovi un disco dalla torre %d "
       "alla torre %d\n", iniziale, finale);
     hanoi(d-1, transito, finale, iniziale);
  }
}
```

29

La torre di Hanoi

Possibile estensione alla soluzione – per quando si conosceranno gli array:

- Rappresentare le torri con array di interi
  - Ogni intero all’interno dell’array rappresenta la dimensione del disco
  - Uno zero, rappresenta l’assenza del disco

30