

Logica e risoluzione: esercizi

CLAUSOLE

- Una **clausola** è una disgiunzione di letterali (cioè formule atomiche negate e non negate), in cui tutte le variabili sono quantificate universalmente in modo implicito.
- Una clausola generica può essere rappresentata come la disgiunzione:

$$A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n \vee \sim B_1 \vee \dots \vee \sim B_m$$

dove A_i ($i=1, \dots, n$) e B_j ($j=1, \dots, m$) sono atomi.

- Una clausola nella quale non compare alcun letterale, sia positivo sia negativo, è detta **clausola vuota** e verrà indicata con \square , interpretato come contraddizione: disgiunzione falso $\vee \sim$ vero
- Un sottoinsieme delle clausole è costituito dalle **clausole definite**, nelle quali si ha sempre un solo letterale positivo:

$$A_1 \vee \sim B_1 \vee \dots \vee \sim B_m$$

TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (1)

- Passi per trasformare una qualunque fbf della logica dei predicati del primo ordine in un insieme di clausole
- 1) **Trasformazione in fbf chiusa**

Esempio la formula:

$$- \forall X (p(Y) \rightarrow \sim(\forall Y (q(X,Y) \rightarrow p(Y)))) \quad (1)$$

è trasformata in:

$$- \forall X \forall Y (p(Y) \rightarrow \sim(\forall Y (q(X,Y) \rightarrow p(Y)))) \quad (2)$$

- 2) **Applicazione delle equivalenze per i connettivi logici** (ad esempio $A \rightarrow B$ è sostituito da $\sim A \vee B$) e la si riduce in forma and-or.

La formula (2) diventa:

$$- \forall X \forall Y (\sim p(Y) \vee \sim(\forall Y (\sim q(X,Y) \vee p(Y)))) \quad (3)$$

TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (2)

- 3) **Applicazione della negazione ad atomi e non a formule composte**, tenendo presente che:

$\forall X \sim A$ equivale a $\sim \exists X A$

$\exists X \sim A$ equivale a $\sim \forall X A$

$\sim(A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n)$ equivale a $\sim A_1 \wedge \sim A_2 \wedge \dots \wedge \sim A_n$

$\sim(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n)$ equivale a $\sim A_1 \vee \sim A_2 \vee \dots \vee \sim A_n$

(leggi di De Morgan).

(3) si modifica in:

$\forall X \forall Y (\sim p(Y) \vee (\exists Y (q(X, Y) \wedge \sim p(Y))))$ (4)

- 4) **Cambiamento di nomi delle variabili**, nel caso di conflitti.

in (4) la seconda variabile Y viene rinominata Z:

$\forall X \forall Y (\sim p(Y) \vee (\exists Z (q(X, Z) \wedge \sim p(Z))))$ (5)

TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (3)

- 5) **Spostamento dei quantificatori** in testa alla formula (forma prenessa).

$$\forall X \forall Y \exists Z (\sim p(Y) \vee (q(X,Z) \wedge \sim p(Z))) \quad (6)$$

- 6) **Forma normale congiuntiva** cioè come congiunzione di disgiunzioni, con quantificazione in testa.

$$\forall X \forall Y \exists Z ((\sim p(Y) \vee q(X,Z)) \wedge (\sim p(Y) \vee \sim p(Z))) \quad (7)$$

- 7) **Skolemizzazione**: ogni variabile quantificata esistenzialmente viene sostituita da una funzione delle variabili quantificate universalmente che la precedono. Tale funzione è detta funzione di Skolem.

Ad esempio una formula del tipo: $\forall X \exists Y p(X,Y)$ può essere espressa in modo equivalente come: $\forall X p(X,g(X))$

In (7) Z è sostituita da $f(X,Y)$, perché Z si trova nel campo di azione delle quantificazioni $\forall X$ e $\forall Y$:

$$\forall X \forall Y ((\sim p(Y) \vee q(X,f(X,Y))) \wedge (\sim p(Y) \vee \sim p(f(X,Y)))) \quad (8)$$

TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (4)

- **Perdita in espressività.** Non è la stessa cosa asserire: $F: \exists X p(X)$ oppure $F': p(f)$.
- Vale comunque la proprietà che F è inconsistente se e solo se F' è inconsistente.
- 8) **Eliminazione dei quantificatori universali:** si ottiene è una formula detta universale (tutte le sue variabili sono quantificate universalmente) in forma normale congiuntiva.
- $((\sim p(Y) \vee q(X, f(X, Y))) \wedge (\sim p(Y) \vee \sim p(f(X, Y))))$ (9)
- Una formula di questo tipo rappresenta **un insieme di clausole** (ciascuna data da un congiunto nella formula). La forma normale a clausole che si ottiene: $\{\sim p(Y) \vee q(X, f(X, Y)), \sim p(Y) \vee \sim p(f(X, Y))\}$ (10)
- La seconda clausola può essere riscritta rinominando le variabili (sostituendo cioè la formula con una sua variante).
- $\{\sim p(Y) \vee q(X, f(X, Y)), \sim p(Z) \vee \sim p(f(W, Z))\}$ (11)

TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (5)

- Qualunque teoria del primo ordine T può essere trasformata in una teoria T' in forma a clausole.
- Anche se T non è logicamente equivalente a T' (a causa dell'introduzione delle funzioni di Skolem), vale comunque la seguente proprietà:

Proprietà

- Sia T una teoria del primo ordine e T' una sua trasformazione in clausole. Allora T è insoddisfacibile se e solo se T' è insoddisfacibile.
- Il principio di risoluzione è una procedura di dimostrazione che opera per contraddizione e si basa sul concetto di insoddisfacibilità.

IL PRINCIPIO DI RISOLUZIONE

- Il principio di risoluzione, che si applica a formule in forma a clausole, è molto più efficiente del metodo assiomatico-deduttivo ed è utilizzato dalla maggior parte dei risolutori automatici di teoremi.

- **Logica Proporzionale:** clausole prive di variabili.

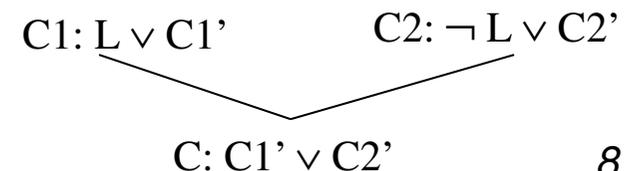
- Siano C_1 e C_2 due clausole prive di variabili:

$$C_1 = A_1 \vee \dots \vee A_n \qquad C_2 = B_1 \vee \dots \vee B_m$$

- Se esistono in C_1 e C_2 due letterali **opposti**, A_i e B_j , ossia tali che $A_i = \sim B_j$, allora da C_1 e C_2 , (clausole **parent**) si può derivare una nuova clausola C_3 , denominata **risolvente**, della forma:

$$C_3 = A_1 \vee \dots \vee A_{i-1} \vee A_{i+1} \vee \dots \vee A_n \vee B_1 \vee \dots \vee B_{j-1} \vee B_{j+1} \vee \dots \vee B_m$$

- **C_3 è conseguenza logica di $C_1 \cup C_2$.**



Esercizio 1

- Si trasformi la seguente frase della logica dei predicati del primo ordine nella forma a clausole:
- *"Le case grandi richiedono un grosso lavoro a meno che non abbiano una persona addetta alle pulizie e non abbiano il giardino".*
- Si discuta inoltre se sarebbe possibile trasformarla in clausole di Horn e si motivi la risposta.

Esercizio 1

- Si trasformi la seguente frase della logica dei predicati del primo ordine nella forma a clausole:
- *"Le case grandi richiedono un grosso lavoro a meno che non abbiano una persona addetta alle pulizie e non abbiano il giardino".*

**$\forall H \text{ big}(H) \wedge \text{house}(H) \rightarrow \text{work}(H) \vee \{\exists M \text{ cleans}(M,H)$
and not $\exists G \text{ garden}(G,H)\}$**

- Si discuta inoltre se sarebbe possibile trasformarla in clausole di Horn e si motivi la risposta.

Soluzione Esercizio 1

1. Trasformazione in fbf chiuse

2. Elimino le implicazioni: $A \rightarrow B$ equivale a $\text{not } A \vee B$

$\forall H \text{ not big}(H) \vee \text{not house}(H) \vee \text{work}(H) \vee \{\exists M \text{ cleans}(M,H) \wedge \text{not } \exists G \text{ garden}(G,H)\}$

3. Riduzione del connettivo not a soli atomi e non più a formule composte

$\forall H \text{ not big}(H) \vee \text{not house}(H) \vee \text{work}(H) \vee \{\exists M \text{ cleans}(M,H) \wedge \forall G \text{ not garden}(G,H)\}$

4. Cambiamento di nomi delle variabili (in caso di conflitti).

Soluzione Esercizio 1

5. Spostamento dei quantificatori in testa alla formula

$$\forall H \exists M \forall G \text{ not big}(H) \vee \text{not house}(H) \vee \text{work}(H) \vee \{\text{cleans}(M,H) \wedge \text{not garden}(G,H)\}$$

6. Forma prenessa congiuntiva (congiunzione di disgiunzioni)

$$\forall H \exists M \forall G ((\text{not big}(H) \vee \text{not house}(H) \vee \text{work}(H) \vee \text{cleans}(M,H)) \wedge (\text{not big}(H) \vee \text{not house}(H) \vee \text{work}(H) \vee \text{not garden}(G,H)))$$

7. Skolemizzazione

$$\forall H \forall G ((\text{not big}(H) \vee \text{not house}(H) \vee \text{work}(H) \vee \text{cleans}(f(H),H)) \wedge (\text{not big}(H) \vee \text{not house}(H) \vee \text{work}(H) \vee \text{not garden}(G,H)))$$

8. Eliminazione dei quantificatori universali

Soluzione Esercizio 1

Forma a clausole:

not big(H) \vee not house(H) \vee work(H) \vee
cleans(f(H),H)

not big(H) \vee not house(H) \vee work(H) \vee not
garden(G,H)

La frase non può essere trasformata in clausole di Horn a causa dei letterali positivi: infatti la prima clausola contiene due letterali positivi, mentre le clausole di Horn ne contengono al più uno.

Esercizio 2 - risoluzione

Si assumano i seguenti fatti:

- A Simone piacciono i corsi facili;
- I corsi di scienze sono difficili;
- Tutti i corsi del dipartimento di Intelligenza Artificiale sono facili;
- BK301 è un corso di Intelligenza Artificiale.

Si usi la risoluzione per rispondere alla domanda: Quale corso piace a Simone?

Soluzione Esercizio 2 - risoluzione

- A Simone piacciono i corsi facili;
 $\forall X, \forall Y \quad \text{corso}(Y,X), \text{facile}(X) \rightarrow \text{piace}(\text{simone},X)$
- I corsi di scienze sono difficili;
 $\forall X \quad \text{corso}(\text{scienze}, X) \rightarrow \text{not facile}(X)$
- Tutti i corsi del dipartimento di Intelligenza Artificiale sono facili;
 $\forall X \quad \text{corso}(\text{ai}, X) \rightarrow \text{facile}(X)$
- BK301 è un corso di Intelligenza Artificiale.
 $\text{corso}(\text{ai}, \text{bk301})$.

Goal G: $\exists X \text{ piace}(\text{simone},X), \text{corso}(Y,X)$

Soluzione Esercizio 2 - risoluzione

Forma a clausole:

- Gneg: $\text{not piace}(\text{simone}, X) \vee \text{not corso}(Y, X)$
- C1: $\text{piace}(\text{simone}, X) \vee \text{not corso}(Y, X) \vee \text{not facile}(X)$
- C2: $\text{not facile}(X) \vee \text{not corso}(\text{scienze}, X)$
- C3: $\text{facile}(X) \vee \text{not corso}(\text{ai}, X)$
- C4: $\text{corso}(\text{ai}, \text{bk301})$

Soluzione Esercizio 2 - risoluzione

Risoluzione

C5 = G e C4 : not piace(simone, bk301) X/bk301 Y/ai

C6 = C3 e C4: facile(bk301)

C7 = C1 e C5: not corso(Y, bk301) \vee not facile(bk301)

C8 = C6 e C7: not corso(Y,bk301)

C9 = C8 e C4: contraddizione

Esercizio 3 – compito del 5/11/2003

Si formalizzino le seguenti frasi in logica dei predicati:

- Esiste almeno uno studente di Ingegneria che conosce la logica booleana.
- Chi conosce la logica booleana ha capacità logiche.
- Chi non ha capacità logiche, si contraddice.
- Chi si contraddice, non ha capacità logiche.
- Piero studia ad ingegneria e conosce la logica booleana.

Le si trasformi in clausole e si usi poi il principio di risoluzione per dimostrare che c'è uno studente di Ingegneria che non si contraddice.

Soluzione Esercizio 3

- Esiste almeno studente di Ingegneria che conosce la logica booleana.

$\exists Y$ (**studIng(Y) and conosce(Y,boole)**)

- Chi conosce la logica booleana ha capacità logiche.

$\forall X$ (**conosce(X,boole) => haLogica(X)**)

- Chi non ha capacità logiche, si contraddice.

$\forall X$ (**not haLogica(X) => contraddice(X)**)

- Chi si contraddice, non ha capacità logiche.

$\forall X$ (**contraddice(X) => not haLogica(X)**)

- Piero studia ad ingegneria e conosce la logica booleana.

studIng(piero) and conosce(piero,boole)

Goal: $\exists Y$ **studIng(Y) and not contraddice(Y)**

Soluzione Esercizio 3

Clausole:

- **C1** studIng(c)
- **C2** conosce(c,boole)
- **C3** not conosce(X,boole) or haLogica(X)
- **C4** haLogica(X) or contraddice(X)
- **C5** not contraddice(X) or not haLogica(X)
- **C6** studIng(piero)
- **C7** conosce(piero,boole)

- **C8** not studIng(Y) or contraddice(Y) (goal negato)

Soluzione Esercizio 3

Risoluzione:

- **C9 not haLogica(Y) or not studIng(Y)** (da C5 e C8)
- **C10 not conosce(Y,boole) or not studIng(Y)**
(da C9 e C3)
- **C11 not conosce(piero,boole)** (da C10 e C6)
- **C12 Clausola vuota** (da C11 e C7)

Esercizio 4

Si consideri la seguente conoscenza:

Antonio, Michele e Giovanni sono iscritti al CAI (Club Alpino Italiano). Ogni appartenente al Club che non è sciatore è uno scalatore. Gli scalatori non amano la pioggia. Ogni persona che non ama la neve non è uno sciatore. Antonio non ama ciò che Michele ama. Antonio ama la pioggia e la neve.

Si rappresenti tale conoscenza come un insieme di predicati del primo ordine appropriati per un sistema di refutazione che lavori mediante risoluzione.

Si mostri come tale sistema risolverebbe la domanda: **"C'è un membro del CAI che è uno scalatore, ma non uno sciatore?"**

Soluzione Esercizio 4

Formule logiche:

1. $\forall X$ iscritto(X), not sciatore(X) \rightarrow scalatore(X)
2. $\forall X$ scalatore (X) \rightarrow not ama(X,pioggia)
3. $\forall X$ not ama(X,neve) \rightarrow not sciatore(X)
4. $\forall X$ ama(michele,X) \rightarrow not ama(antonio,X)
5. ama(antonio,neve)
6. ama(antonio, pioggia)
7. iscritto(antonio)
8. iscritto(michele)
9. iscritto(giovanni)

Goal: $\exists X$ iscritto(X), scalatore(X), not sciatore(X)

Soluzione Esercizio 4

Forma a clausole:

C1. $\text{not iscritto}(X) \vee \text{sciatore}(X) \vee \text{scalatore}(X)$

C2. $\text{not scalatore}(X) \vee \text{not ama}(X, \text{pioggia})$

C3. $\text{ama}(X, \text{neve}) \vee \text{not sciatore}(X)$

C4. $\text{not ama}(\text{michele}, X) \vee \text{not ama}(\text{antonio}, X)$

C5. $\text{ama}(\text{antonio}, \text{neve})$

C6. $\text{ama}(\text{antonio}, \text{pioggia})$

C7. $\text{iscritto}(\text{antonio})$

C8. $\text{iscritto}(\text{michele})$

C9. $\text{iscritto}(\text{giovanni})$

Gneg: $\text{not iscritto}(X) \vee \text{not scalatore}(X) \vee \text{sciatore}(X)$

Soluzione Esercizio 4

Risoluzione

C10=Gneg - C8

not scalatore(michele) \vee sciatore(michele) {X/michele}

C11=C10 - C3

not scalatore(michele) \vee ama(michele,neve)

C12=C11-C4

not scalatore(michele) \vee not ama(antonio,neve)

C13=C12 e C5 not scalatore(michele)

C14=C13 e C1 not iscritto(michele) \vee sciatore(michele)

C15=C13 e C8 sciatore(michele)

C16=C15 e C3 ama(michele,neve)

C17=C16 e C4 not ama(antonio,neve)

C18=C17 e C5 clausola vuota

OR esclusivo: come si traduce

- Ogni studente e' promosso o bocciato (or esclusivo)
- $\forall X \text{ studente}(X) \rightarrow \text{promosso}(X) \text{ or-ex } \text{bocciato}(X)$.
- $\forall X \text{ studente}(X) \rightarrow (\text{promosso}(X) \text{ or } \text{bocciato}(X)) \text{ and}$
- $(\text{not } \text{promosso}(X) \text{ or } \text{not } \text{bocciato}(X))$
- $(\forall X \text{ studente}(X) \rightarrow \text{promosso}(X) \text{ or } \text{bocciato}(X)) \text{ and}$
- $(\forall X \text{ studente}(X) \rightarrow \text{not } \text{promosso}(X) \text{ or } \text{not } \text{bocciato}(X))$

- C1:
- $\text{not } \text{studente}(X) \text{ or } \text{promosso}(X) \text{ or } \text{bocciato}(X)$
- C2:
- $\text{not } \text{studente}(X) \text{ or } \text{not } \text{promosso}(X) \text{ or } \text{not } \text{bocciato}(X)$