# Dimostrazioni in logica dei predicati

- La logica dei predicati e' un linguaggio piu' potente per esprimere KB (variabili e quantificatori)
- Vedremo la dimostrazione basata su
  - Risoluzione (corretta e completa per clausole generali)
  - Forward chaining (corretta e completa per clausole Horn) Usata nei Database deduttivi (DATALOG)
  - Backward chaining (corretta e completa per clausole Horn) Usata nella Programmazione Logica (PROLOG).

# TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (1)

- Una qualunque fbf della logica dei predicati si puo' trasformare in un insieme di clausole generali.
- Passi
- 1) **Trasformazione in fbf chiusa**

  Esempio la formula:

  – $\forall X\ (p(Y) \rightarrow \sim(\forall Y\ (q(X,Y) \rightarrow p(Y))))$ (1)

  è trasformata in:

  – $\forall X\ \forall Y\ (p(Y) \rightarrow \sim(\forall Y\ (q(X,Y) \rightarrow p(Y))))$ (2)

- 2) **Applicazione delle equivalenze per i connettivi logici** (ad esempio $A \rightarrow B$ è sostituito da $\sim A \vee B$) e la si riduce in forma and-or.

  La formula (2) diventa:

  – $\forall X\ \forall Y\ (\sim p(Y) \vee \sim(\forall Y\ (\sim q(X,Y) \vee p(Y))))$ (3)

# TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (2)

- 3) **Applicazione della negazione ad atomi e non a formule composte**, tenendo presente che:

  $\forall X \sim A$ equivale a $\sim \exists X\ A$

  $\exists X \sim A$ equivale a $\sim \forall X\ A$

  $\sim(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n)$ equivale a $\sim A_1 \wedge \sim A_2 \wedge \ldots \wedge \sim A_n$

  $\sim(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n)$ equivale a $\sim A_1 \vee \sim A_2 \vee \ldots \vee \sim A_n$

  (leggi di De Morgan).

  (3) si modifica in:

  $\forall X\ \forall Y\ (\sim p(Y) \vee (\exists Y\ (q(X,Y) \wedge \sim p(Y))))$ (4)

- 4) **Cambiamento di nomi delle variabili**, nel caso di conflitti.

  in (4) la seconda variabile Y viene rinominata Z:

  $\forall X\ \forall Y\ (\sim p(Y) \vee (\exists Z\ (q(X,Z) \wedge \sim p(Z))))$ (5)

# TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (3)

- 5) **Spostamento dei quantificatori** in testa alla formula (forma prenessa).

  $\forall X \, \forall Y \, \exists Z \, (\sim p(Y) \vee (q(X,Z) \wedge \sim p(Z)))$ (6)

- 6) **Forma normale congiuntiva** cioè come congiunzione di disgiunzioni, con quantificazione in testa.

  $\forall X \, \forall Y \, \exists Z \, ((\sim p(Y) \vee q(X,Z)) \wedge (\sim p(Y) \vee \sim p(Z)))$ (7)

- 7) **Skolemizzazione:** ogni variabile quantificata esistenzialmente viene sostituita da una funzione delle variabili quantificate universalmente che la precedono. Tale funzione è detta funzione di Skolem.

  Ad esempio una formula del tipo: $\forall X \, \exists Y \, p(X,Y)$ può essere espressa in modo equivalente come: $\forall X \, p(X,g(X))$

  In (7) Z è sostituita da f(X,Y), perché Z si trova nel campo di azione delle quantificazioni $\forall X$ e $\forall Y$:

  $\forall X \forall Y \, ((\sim p(Y) \vee q(X,f(X,Y))) \wedge (\sim p(Y) \vee \sim p(f(X,Y))))$ (8)

# TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (4)

- **Perdita in espressività**. Non è la stessa cosa asserire: F: $\exists$X p(X) oppure F': p(f).
- Vale comunque la proprietà che F è inconsistente se e solo se F' è inconsistente.
- 8) **Eliminazione dei quantificatori universali**: si ottiene è una formula detta universale (tutte le sue variabili sono quantificate universalmente) in forma normale congiuntiva.
- $((\sim p(Y) \vee q(X,f(X,Y))) \wedge (\sim p(Y) \vee \sim p(f(X,Y))))$ (9)
- Una formula di questo tipo rappresenta **un insieme di clausole** (ciascuna data da un congiunto nella formula). La forma normale a clausole che si ottiene: $\{\sim p(Y) \vee q(X,f(X,Y)), \sim p(Y) \vee \sim p(f(X,Y))\}$ (10)
- La seconda clausola può essere riscritta rinominando le variabili (sostituendo cioè la formula con una sua variante).
- $\{\sim p(Y) \vee q(X,f(X,Y)), \sim p(Z) \vee \sim p(f(W,Z))\}$ (11)

# TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (5)

- Qualunque teoria del primo ordine T può essere trasformata in una teoria T' in forma a clausole.
- Anche se T non è logicamente equivalente a T' (a causa dell'introduzione delle funzioni di Skolem), vale comunque la seguente proprietà:

**Proprietà**

- Sia T una teoria del primo ordine e T' una sua trasformazione in clausole. Allora T è insoddisfacibile se e solo se T' è insoddisfacibile.
- Il principio di risoluzione è una procedura di dimostrazione che opera per contraddizione e si basa sul concetto di insoddisfacibilità.

# UNIFICAZIONE

- Per applicare il principio di risoluzione alle clausole non “ground” è necessario introdurre il concetto di unificazione [Robinson 65].
- **Unificazione**: procedimento di manipolazione formale utilizzato per stabilire quando due espressioni possono coincidere procedendo a opportune sostituzioni.
- **Sostituzione**: $\sigma$ insieme di legami di termini $T_i$ a simboli di variabili $X_i$ (i=1,..,n).

  $\sigma = \{X_1/T_1, X_2/T_2,...,X_n/T_n\}$

  dove $X_1, X_2,..., X_n$ sono distinte.
- La sostituzione corrispondente all'insieme vuoto è detta **sostituzione identità** ( $\varepsilon$).

# SOSTITUZIONI E RENAMING

- **Applicazione della sostituzione σ a un'espressione E**, [E]σ, produce una nuova espressione ottenuta sostituendo simultaneamente ciascuna variabile $X_i$ dell'espressione con il corrispondente termine $T_i$. [E]σ è detta **istanza** di E.

- **Renaming**: sostituzioni che cambiano semplicemente il nome ad alcune delle variabili di E. , [E]σ è una **variante** di E.

# SOSTITUZIONI ESEMPIO

- L'applicazione della sostituzione σ = {X/c, Y/a, Z/W} all'espressione p(X,f(Y),b,Z) produce l'istanza p(c,f(a),b,W).

Analogamente:

[c(Y,Z)]{Y/T, Z/neri} = c(T,neri)

[c(T,neri)]{Y/T, Z/neri} = c(T,neri)

[c(Y,Z)]{Y/bianchi,T/bianchi,Z/neri}=

c(bianchi,neri)

[c(T,neri)]{Y/bianchi,T/bianchi,Z/neri}=

c(bianchi,neri)

[c(Y,Z)]{Y/T, Z/bianchi} = c(T,bianchi)

[c(T,neri)]{Y/T, Z/bianchi} = c(T,neri)

[t(l(a),t(l(b),l(H)))]{H/l(a), Y/l(b),
Z/l(l(a))}=

t(l(a),t(l(b),l(l(a))))

[t(H,t(Y,Z))]{H/T,Y/X,Z/W}=t(T,t(X,W))

(e8) è una variante dell'espressione di partenza.

[c(T,neri)]ε = c(T,neri)

[p(X,Y)]{X/a,Y/X} = p(a,X)

# COMBINAZIONE DI SOSTITUZIONI

- **Combinazioni di sostituzioni**:

  $\sigma_1=\{X_1/T_1,X_2/T_2,...,X_n/T_n\}\sigma_2=\{Y_1/Q_1,Y_2/Q_2,...,Y_m/Q_m\}$

- **composizione** $\sigma_1\sigma_2$ di $\sigma_1$ e $\sigma_2$ è la sostituzione

  $\{X_1/[T_1]\sigma_2,...,X_n/[T_n]\sigma_2,Y_1/Q_1,Y_2/Q_2,..,Y_m/Q_m\}$

  cancellando le coppie $X_i/[T_i]\sigma_2$ per le quali si ha $X_i=[T_i]\sigma_2$ e le coppie $Y_j/Q_j$ per le quali $Y_j$ appartiene all'insieme $\{X_1, X_2,...,X_n\}$.

**Esempio :** $\sigma_1 = \{X/f(Z), W/R, S/c\}$ $\sigma_2 = \{Y/X, R/W, Z/b\}$

produce: $\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2 = \{X/f(b), S/c, Y/X, R/W, Z/b\}$.

# SOSTITUZIONI PIU' GENERALI

- **Sostituzioni più generali:** Una sostituzione $\theta$ è più generale di una sostituzione $\sigma$ se esiste una sostituzione $\lambda$ tale che $\sigma=\theta\lambda$.

**Esempio :** La sostituzione $\theta = \{Y/T, Z/neri\}$ è più generale della sostituzione $\sigma = \{Y/bianchi, T/bianchi, Z/neri\}$ in quanto $\sigma$ si può ottenere attraverso la composizione $\{Y/T, Z/neri\}\{T/bianchi\}$ ($\sigma=\theta\lambda$, e $\lambda = \{T/bianchi\}$).

# SOSTITUZIONE UNIFICATRICE

- L'**unificazione** rende identici due o più atomi (o termini) (o meglio le loro **istanze**) attraverso un'opportuna sostituzione.
- Se si considerano solo due atomi (o termini), uno dei quali senza alcuna variabile, si ricade in un caso particolare di unificazione, detto **pattern-matching**.
- Un insieme di atomi (o termini) $A_1$, $A_2$,..., $A_n$ è **unificabile** se esiste una sostituzione $\sigma$ tale che:

  $[A_1]\sigma = [A_2]\sigma = .... = [A_n]\sigma$.

- La sostituzione $\sigma$ è detta **sostituzione unificatrice** (o unificatore)

# ESEMPIO

**Esempio** Se si considerano gli atomi:

A1=c(Y,Z)  A2=c(T,neri)

- possibili sostituzioni unificatrici sono:

  $\theta$ = {Y/T, Z/neri}

  $\sigma$ = {Y/bianchi, T/bianchi, Z/neri}

- la loro applicazione produce la stessa istanza:

  [c(Y,Z)]$\theta$ = [c(T,neri)]$\theta$ = c(T,neri)

  [c(Y,Z)]$\sigma$ = [c(T,neri)]$\sigma$ = c(bianchi,neri)

- La sostituzione:

  $\lambda$={Y/T, Z/bianchi} non è un unificatore per A1 e A2 perchè produce istanze diverse.

# ESEMPIO

- **Per gli atomi:**

  A3: p(X,X,f(a,Z)) A4: p(Y,W,f(Y,J))

- possibili sostituzioni unificatrici sono:

  $\mu$ = {X/a, Y/a, W/a, J/Z}

  $\varphi$ = {X/a,Y/a,W/a, J/c, Z/c}

- la loro applicazione ad A3 e A4 produce la stessa istanza:

  p(a,a,f(a,Z)) nel caso della sostituzione $\mu$

  p(a,a,f(a,c)) nel caso della sostituzione $\varphi$.

- Possono esistere più sostituzioni unificatrici, si vuole individuare quella più generale (mgu, **most general unifier**).

  $\mu$ mgu: $\varphi$ si ottiene da $\mu$ componendola con: $\alpha$ = {Z/c}.

# ESEMPI

**θ indica la sostituzione unificatrice più generale:**

1) p(X,f(a)) p(b, Y )

θ = {X/b, Y/f(a)}

2) t(l(a),t(l(b),l(c))) t(l(X),Z)

θ = {X/a, Z/t(l(b),l(c))}

I termini t(l(a),t(l(b),l(c))) e t(l(X),Z) rappresentano alberi binari.

3) t(l(a),t(l(b),l(H))) t(H,t(Y,Z))

θ = {H/l(a), Y/l(b), Z/l(l(a))}

4) f(X,g(Y),T) f(c(a,b),g(g(a,c)),Z).

θ = {X/c(a,b), Y/g(a,c), T/Z}

5) .(a,.(b,.(c,.(d,[])))) .(X,Y)

θ = {X/a, Y/.(b,.(c,.(d,[])))}

rappresentano liste

6) .(a,.(b,.(c,.(d,[])))) .(X,.(Y,Z))

θ = {X/a, Y/b, Z/.(c,.(d,[]))}

7) .(a,.(b,.(c,.(d,[])))) .(c,Y)

Non sono unificabili.

8) t(t(t(X,Y),l(c)),Y)
t(t(t(Y,Y),l(c)),l(X))

Non sono unificabili

# ALGORITMO DI UNIFICAZIONE

- Algoritmo in grado di determinare se due atomi (o termini) sono unificabili o meno e restituire, nel primo caso, la sostituzione unificatrice più generale.
- Esistono vari algoritmi di unificazione di differente complessità.
- Regole alla base dell'algoritmo di unificazione fra due termini T1 e T2.

| T1 \ T2 | <costante> C2 | <variabile> X2 | <termine composto> S2 |
|---|---|---|---|
| <costante> C1 | ok se C1=C2 | ok {X2/C1} | NO |
| <variabile> X1 | ok {X1/C2} | ok {X1/X2} | ok {X1/S2} |
| <termine composto> S1 | NO | ok {X2/S1} | ok se S1 e S2 hanno stesso funtore e arietà e gli argomenti UNIFICANO |

# ALGORITMO DI UNIFICAZIONE

- Funzione UNIFy che ha come parametri di ingresso due atomi o termini da unificare A e B e la sostituzione eventualmente già applicata.
- La funzione termina sempre ed è in grado di fornire o la sostituzione più generale per unificare A e B o un fallimento (FALSE).
- Un termine composto (cioè diverso da costante o variabile) è rappresentato da un operatore OP (il simbolo funzionale del termine) e come altri elementi gli argomenti del termine ARGS (lista).
- Es: f(a,g(b,c),X) rappresentato come: [f,a,[g,b,c],X].
- La funzione head, applicata a una lista L, restituisce il primo elemento di L, mentre la funzione tail il resto della lista L.

# L'algoritmo di unificazione

```
function UNIFY(x, y, θ) returns a substitution to make x and y identical
  inputs: x, a variable, constant, list, or compound
          y, a variable, constant, list, or compound
          θ, the substitution built up so far

  if θ = failure then return failure
  else if x = y then return θ
  else if VARIABLE?(x) then return UNIFY-VAR(x, y, θ)
  else if VARIABLE?(y) then return UNIFY-VAR(y, x, θ)
  else if COMPOUND?(x) and COMPOUND?(y) then
      return UNIFY(ARGS[x], ARGS[y], UNIFY(OP[x], OP[y], θ))
  else if LIST?(x) and LIST?(y) then
      return UNIFY(REST[x], REST[y], UNIFY(FIRST[x], FIRST[y], θ))
  else return failure
```

# L'algoritmo di unificazione

**function** UNIFY-VAR($var, x, \theta$) **returns** a substitution

**inputs:** $var$, a variable
$x$, any expression
$\theta$, the substitution built up so far

**if** $\{var/val\} \in \theta$ **then return** UNIFY($val, x, \theta$)
**else if** $\{x/val\} \in \theta$ **then return** UNIFY($var, val, \theta$)
**else if** OCCUR-CHECK?($var, x$) **then return** failure
**else return** add $\{var/x\}$ to $\theta$

# OCCUR CHECK

- È il controllo che un termine variabile da unificare con un secondo termine non compaia in quest'ultimo. Necessario per assicurare la terminazione dell'algoritmo e la correttezza del procedimento di unificazione.
- I due termini "X" e "f(X)" non sono: non esiste una sostituzione per X che renda uguali i due termini.
- Se un termine t ha una struttura complessa, la verifica se X compare in t può essere anche molto inefficiente.
- Prolog NON utilizza l'occur-check: non corretto !!

# OCCUR CHECK: ESEMPIO

- **Esempio:** Si considerino i termini:
  - `p(X,f(X)).`
  - `p(Y,Y).`
  - Per Prolog (senza occur check) unificano e viene prodotta la sostituzione (contenente un termine infinito): `Y=f(f(f(.....)))`
- **Quindi se p rappresentasse il predicato maggiore ed f la funzione successore deriverebbe che esiste un numero maggiore di se' stesso!**
- **Dimostrazione non corretta!!**
- .

# IL PRINCIPIO DI RISOLUZIONE PER LE CLAUSOLE GENERALI

- Clausole nelle quali possono comparire variabili.
- Siano $C_1$ e $C_2$ due clausole del tipo:

  $C_1 = A_1 \vee ... \vee A_n$ $\qquad\qquad$ $C_2 = B_1 \vee ... \vee B_m$

- dove $A_i$ (i=1..n) e $B_j$ (j=1..m) è un letterale positivo o negativo in cui possono comparire variabili.
- Se esiste $A_i$ e Bj tali che $[A_i]\theta = [\sim B_j]\theta$ , dove $\theta$ è la sostituzione unificatrice più generale, allora si può derivare una nuova clausola $C_3$ (il risolvente):

  $[A_1 \vee .. \vee A_{i-1} \vee Ai+_1 \vee .. \vee A_n \vee B_1 \vee ... \vee B_{j-1} \vee B_{j+1} \vee .. \vee B_m]\theta$

- Date due clausole $C_1$ e $C_2$, il loro risolvente $C_3$ è conseguenza logica di $C_1 \cup C_2$.

# MGU PER RICAVARE IL RISOLVENTE
## *Regola di inferenza*

$$\frac{\boldsymbol{A}_1 \vee \ldots \vee \boldsymbol{A}_n \boldsymbol{B}_1 \vee \ldots \vee \boldsymbol{B}_m \exists \theta : [\boldsymbol{A}_i]\theta = [\sim \boldsymbol{B}_j]\theta}{[\boldsymbol{A}_1 \vee \ldots \vee \boldsymbol{A}_{i-1} \vee \boldsymbol{Ai}_{+1} \vee \ldots \vee \boldsymbol{A}_n \vee \boldsymbol{B}_1 \vee \ldots \vee \boldsymbol{B}_{j-1} \vee \boldsymbol{B}_{j+1} \vee \ldots \vee \boldsymbol{B}_m]\theta}$$

dove θ è la sostituzione più generale per $A_i$ e $\sim B_j$.

- **Esempio**

**Si considerino le seguenti clausole:**

p(X,m(a)) ∨ q(S,a) ∨ c(X) (C1)

~p(r,Z) ∨ c(Z) ∨ ~b(W,U) (C2)

I letterali p(X,m(a)) e p(r,Z) sono unificabili attraverso la mgu θ={X/r, Z/m(a)}.

**Risolvente:**

q(S,a) ∨ c(r) ∨ c(m(a)) ∨ ~b(W,U) (C3)

# MGU PER RICAVARE IL RISOLVENTE
## *Regola di inferenza*

- **Esempio**

**Dalle seguenti clausole:**

$p(a,b) \vee q(X,a) \vee c(X)$ (C1)

$\sim p(a,Y) \vee \sim c(f(Y))$ (C2)

**si ottengono i seguenti risolventi:**

$q(X,a) \vee c(X) \vee \sim c(f(b))$ (C3)

$p(a,b) \vee q(f(Y),a) \vee \sim p(a,Y)$ (C4)

C3: ottenuto selezionando p(a,b) da C1 e ~p(a,Y) da C2
e applicando la mgu $\theta=\{Y/b\}$.

C4: ottenuto selezionando c(X) da C1 e ~c(f(Y)) da C2
e applicando la mgu $\theta=\{X/f(Y)\}$.

# ESEMPIO

- **Si considerino gli insiemi:**

H= {$\forall$X (uomo(X) $\rightarrow$ mortale(X)), uomo(socrate)}

F = {$\exists$X mortale(X)}

La trasformazione in clausole di H e ~F produce:

$H^C$ = {~uomo(X) $\vee$ mortale(X), uomo(socrate)}

$F^C$ = {~mortale(X)}

**L'insieme $H^C \cup F^C$ è il seguente:**

{~uomo(X) $\vee$ mortale(X),(1)

uomo(socrate), (2)

~mortale(Y)} (3)

# ESEMPIO

- La variabile X di $F^C$ rinominata con Y che non appare in nessuna altra clausola dell'insieme. Questa operazione viene eseguita ogni volta che si aggiungono nuovi risolventi all'insieme delle clausole.
- Al passo 1, tutti i possibili risolventi, e le sostituzioni unificatrici più generali applicate per derivarli, sono:

| | | |
|---|---|---|
| **{mortale(socrate),** | **(4)** | **θ={X/socrate}** |
| **~uomo(Z)}** | **(5)** | **θ={X/Y}** |

- Al passo 2, da (2) e (5) viene derivata la clausola vuota, applicando la sostituzione {Z/socrate}. La clausola vuota è anche derivabile dalle clausole (3) e (4) applicando la sostituzione {Y/socrate}.

# ESEMPIO

1. cane(fido).
2. ~ abbaia(fido).
3. scodinzola(fido).
4. miagola(geo).
5. scodinzola(X) and  cane(X) -> amichevole(X).
6.amichevole(X1) and ~ abbaia(X1) ->~spaventato(Y1,X1).
7. cane(X2) -> animale(X2).
8. miagola(X3) -> gatto(X3).

Goal : 9. esiste X4 Y  cane(X4) and gatto(Y) and ~spaventato(Y,X4).

TRADUZIONE

1. cane(fido).
2. ~abbaia(fido).
3. scodinzola(fido).
4. miagola(geo).
5.~scodinzola(X) or ~cane(X) or amichevole(X).
6.~amichevole(X1) or abbaia(X1) or ~spaventato(Y1,X1).
7.~cane(X2) or animale(X2).
8.~miagola(X3) or gatto(X3).

Goal negato: 9.~cane(X4) or ~gatto(Y)or spaventato(Y,X4).

# ESEMPIO

1. cane(fido).
2. ~abbaia(fido).
3. scodinzola(fido).
4. miagola(geo).
5.~scodinzola(X) or ~cane(X) or amichevole(X).
6.~amichevole(X1) or abbaia(X1) or ~spaventato(Y1,X1).
7.~cane(X2) or animale(X2).
8.~miagola(X3) or gatto(X3).

Goal negato: 9.~cane(X4) or ~gatto(Y)or spaventato(Y,X4).

Da 9 e 1: 10. ~gatto(Y) or spaventato(Y,fido).

Da 10. e 6: 11. ~amichevole(fido) or abbaia(fido) or ~gatto(Y).

Da 11. e 2: 12. ~amichevole(fido) or ~gatto(Y).

Da 8. e 12: 13. ~amichevole(fido) or ~miagola(Y).

Da 13. e 4: 14. ~amichevole(fido).

Da 5. e 14: 15. ~scodinzola(fido) or ~cane(fido).

Da 3. e 15: 16. ~cane(fido)

Da 1. e 16. CONTRADDIZIONE !!

# CORRETTEZZA e COMPLETEZZA

- Si può dimostrare che sotto opportune strategie, la risoluzione è **corretta e completa**.
- Se viene generata la clausola vuota la teoria $H^C \cup F^C$ è insoddisfacibile e se la teoria $H^C \cup F^C$ è insoddisfacibile la derivazione genera la clausola vuota in un numero finito di passi.
- **Teorema**

  (Correttezza e completezza della risoluzione)
- Un insieme di clausole è insoddisfacibile se e solo se l'algoritmo di risoluzione termina con successo in un numero finito di passi, generando la clausola vuota.
- Il metodo di risoluzione procede esaustivamente generando tutti i possibili risolventi ad ogni passo.

# STRATEGIE

- Si definiscono strategie che scelgono opportunamente le clausole da cui derivare un risolvente.
- I metodi di prova che si ottengono risultano più efficienti anche se in alcuni casi possono introdurre incompletezza.
- La dimostrazione attraverso il principio di risoluzione può essere rappresentata con un grafo, detto **grafo di refutazione**.
- Le clausole dell'insieme base $H^C \cup F^C$ sono nodi del grafo dai quali possono solo uscire archi.
- Un risolvente corrisponde a un nodo nel quale entrano almeno due archi (ciascuno da una delle due clausole "parent").
- **Strategia in ampiezza** ("**breadth-first**"). Al passo i ($i \geq 0$), genera tutti i possibili risolventi a livello i+1-esimo utilizzando come clausole "parent" una clausola di $C_i$ (cioè una clausola a livello i) e una di Cj ($j \leq i$), cioè una clausola appartenente a un livello uguale o minore di i.

# ESEMPIO

$H = H^C$ = {on(b1,tavola), (1)

on(b2,tavola), (2)

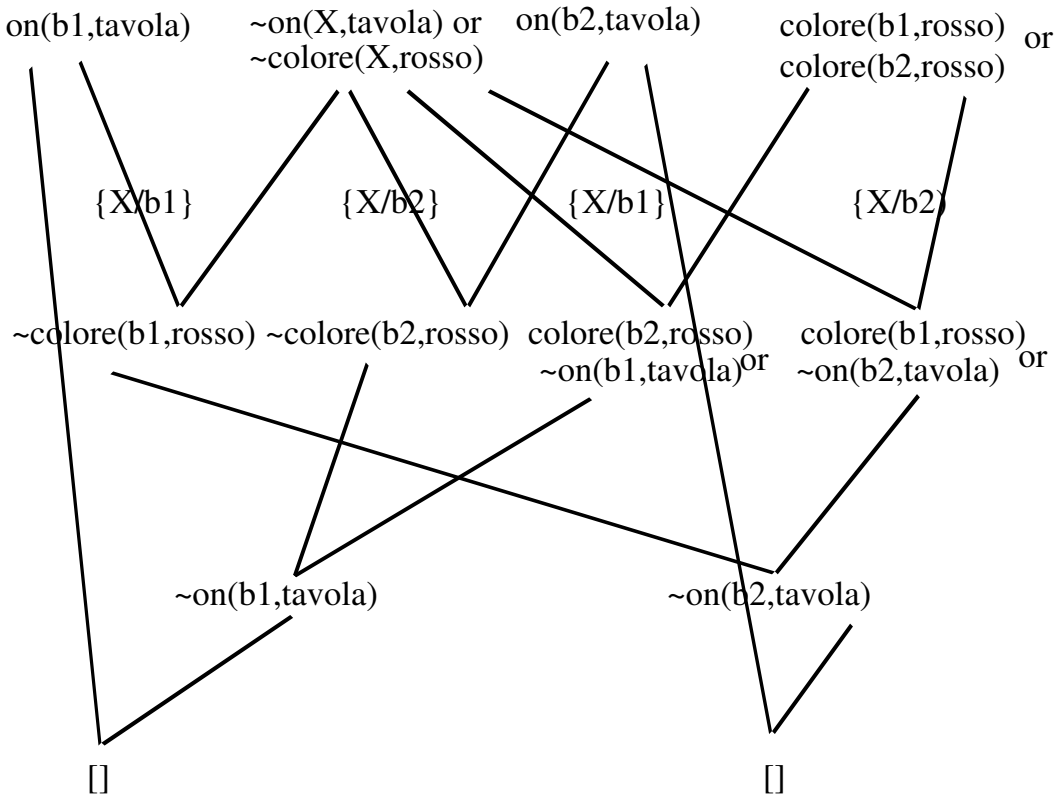
colore(b1,rosso) $\vee$ colore(b2,rosso) (3)

F = {$\exists$X (on(X,tavola) $\wedge$ colore(X,rosso))}

$F^C$ = {~on(X,tavola) $\vee$ ~colore(X,rosso)}

- L'applicazione della strategia in ampiezza produce il **grafo di refutazione** riportato nel seguito:

# ESEMPIO


on(b1,tavola)
~on(X,tavola) or
~colore(X,rosso)
on(b2,tavola)
colore(b1,rosso)
colore(b2,rosso)
or
{X/b1}
{X/b2}
{X/b1}
{X/b2}
~colore(b1,rosso)
~colore(b2,rosso)
colore(b2,rosso)
~on(b1,tavola)
or
colore(b1,rosso)
~on(b2,tavola)
or
~on(b1,tavola)
~on(b2,tavola)
[]
[]

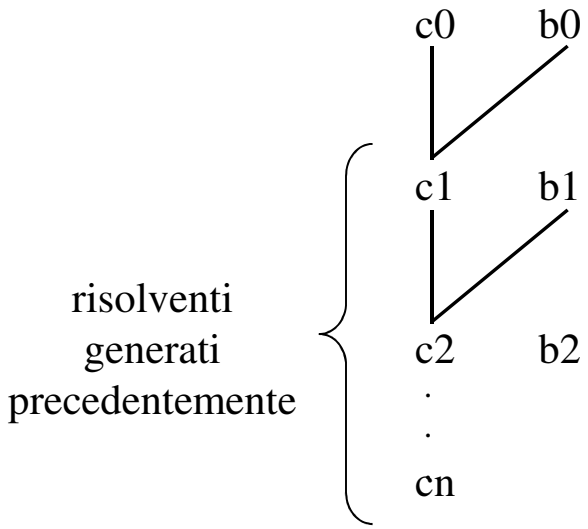
# STRATEGIE

- Strategia **lineare** (completa) sceglie almeno una clausola “parent” dall'insieme base $C_0$ oppure tra i risolventi generati precedentemente. La seconda clausola parent è sempre il risolvente ottenuto al passo precedente.

- Nel caso di risoluzione lineare, il grafo di refutazione diventa un albero, detto albero di refutazione.

# STRATEGIE

**Albero lineare** : $c_0$ appartiene a $C_0$ (cioè all'insieme base) e $b_i$ appartiene a $C_0$ oppure è uguale a $c_j$ con j<i.

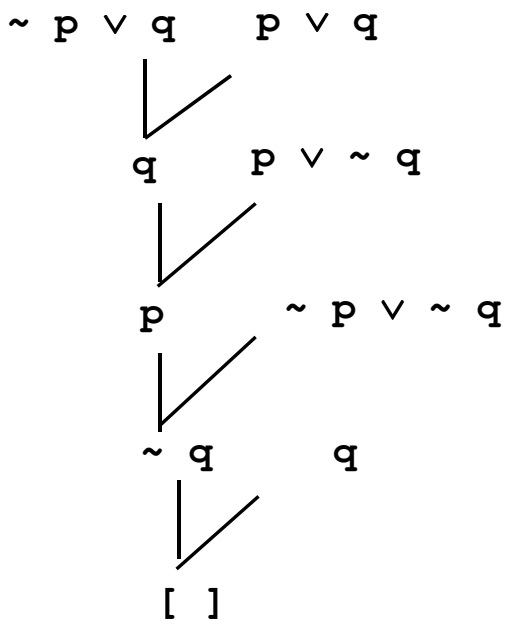


# ESEMPIO

- C0={p∨q, ~p∨q, p∨~q, ~p∨~q}, ottenuto da:

  **H = {q→p, ~q→p, p→q} ;** **F = q∧p negando ~ (q∧p) cioe'** ~p∨~q

- Le clausole "parent" rappresentate sulla destra dell'albero sono formule di C0 (le prime tre) e un risolvente generato in precedenza (la formula "q").



# ESEMPIO

$H^C$={sum(0,X1,X1), sum(s(X),Y,s(Z)) $\vee$ ~sum(X,Y,Z)}

$F^C$ = {~sum(s(0),s(s(0)),Y1)}

- dove $F^C$ è stato ottenuto negando la formula:

  F = $\exists$Y sum(s(0),s(s(0)),Y)

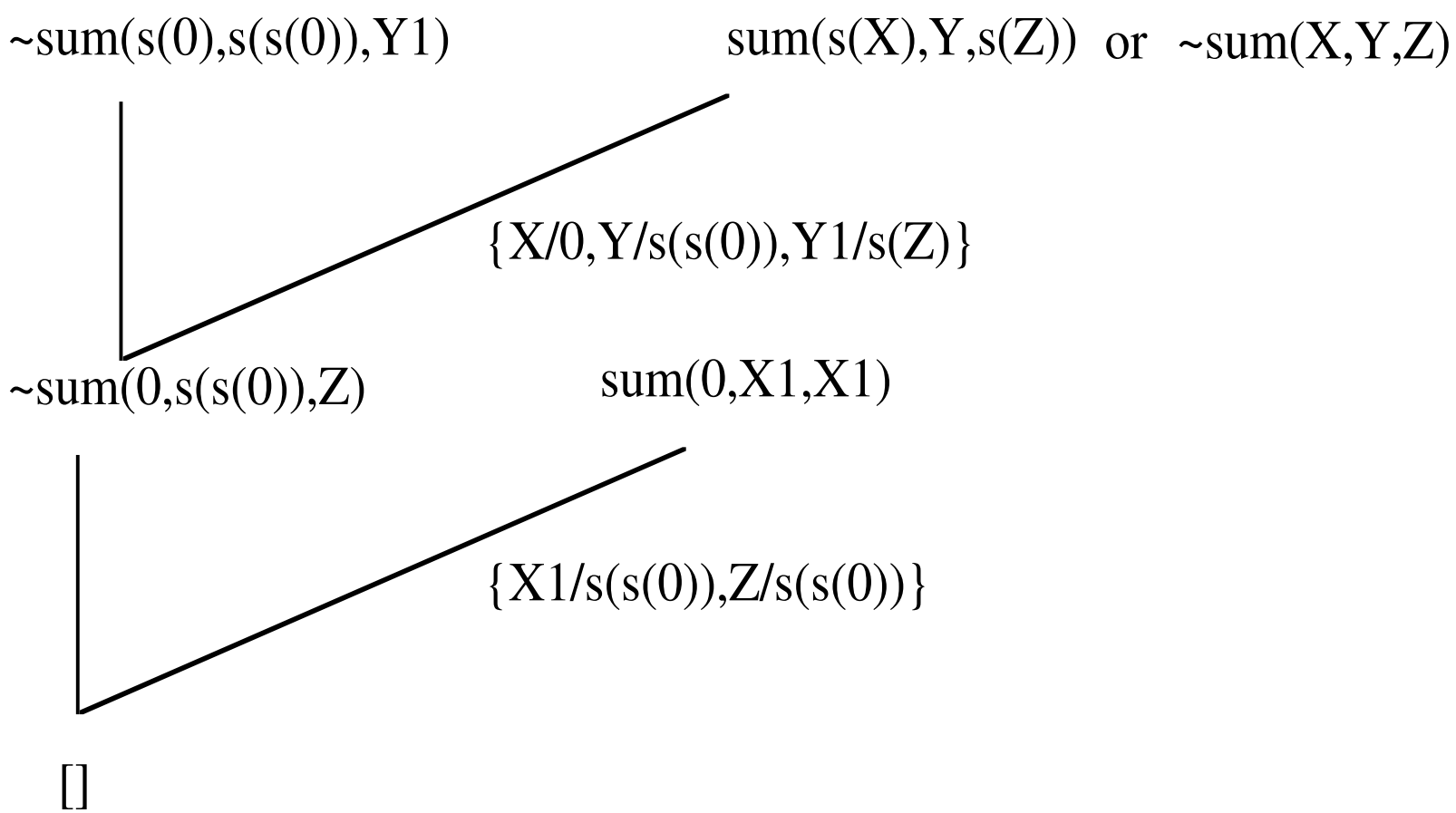
- L'insieme base $C_0$=$H^C \cup F^C$ risulta:

  $C_0$ = {sum(0,X1,X1), sum(s(X),Y,s(Z)) $\vee$ ~sum(X,Y,Z),

  ~sum(s(0),s(s(0)),Y1)}

- Strategie complete producono comunque grafi di refutazione molto grandi $\rightarrow$ inefficienti $\rightarrow$ strategie non complete.

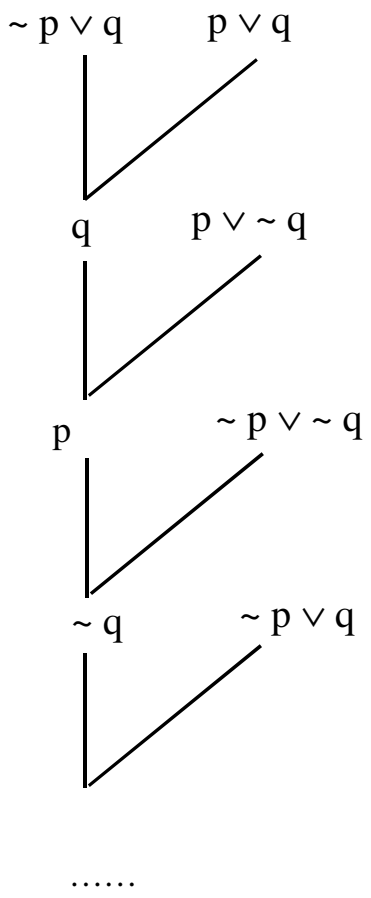
# ESEMPIO


~sum(s(0),s(s(0)),Y1)
sum(s(X),Y,s(Z)) or ~sum(X,Y,Z)
{X/0,Y/s(s(0)),Y1/s(Z)}
~sum(0,s(s(0)),Z)
sum(0,X1,X1)
{X1/s(s(0)),Z/s(s(0))}
[]

# STRATEGIE

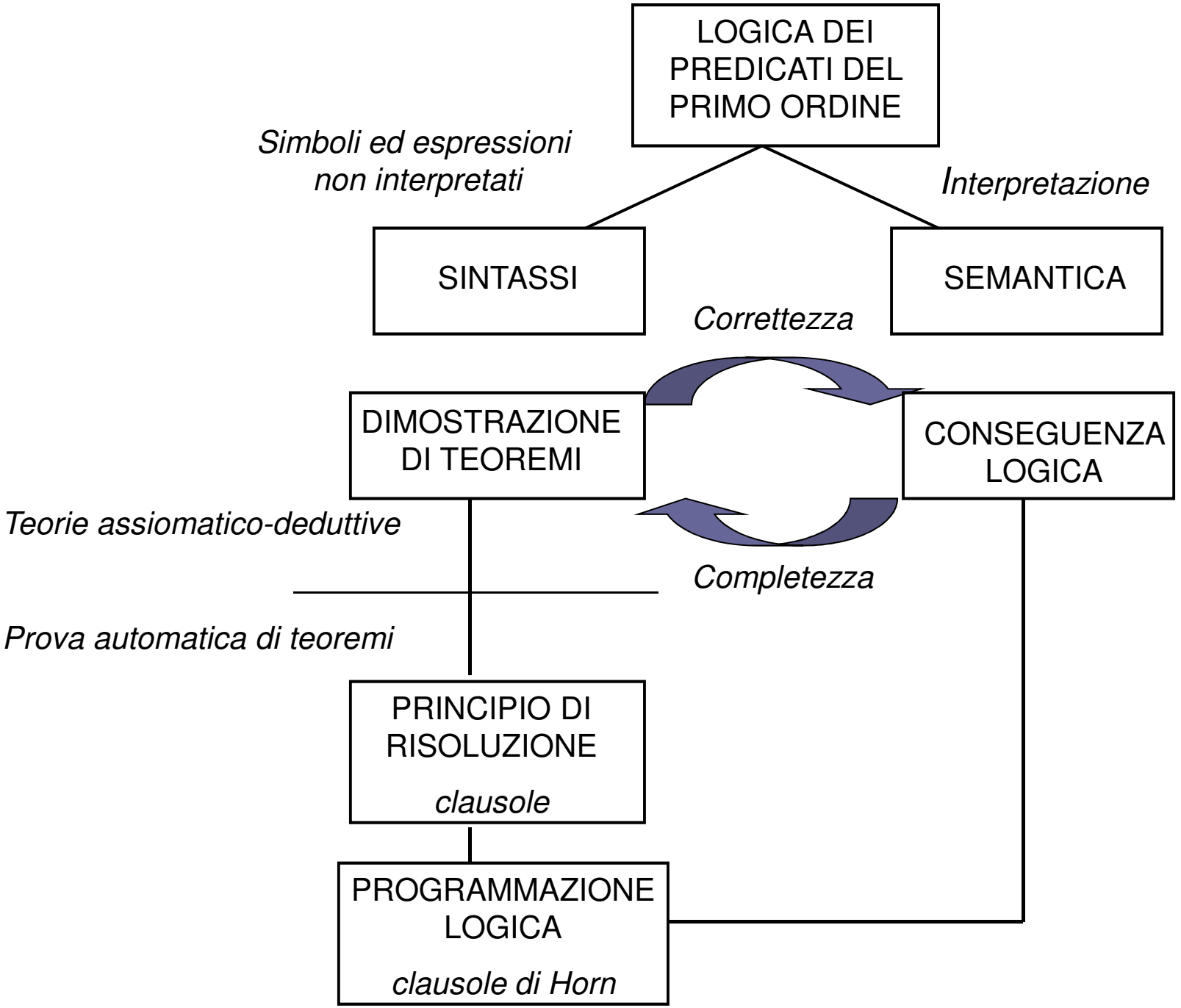
- Strategia **linear-input** non completa sceglie che ha sempre una clausola “parent” nell'insieme base $C_0$, mentre la seconda clausola “parent” è il risolvente derivato al passo precedente.
- Caso particolare della risoluzione lineare:
  - vantaggio: memorizzare solo l'ultimo risolvente
  - svantaggio: non completa

# ESEMPIO




C0={p∨q, ~p∨q, p∨~q, ~p∨~q} insoddisfacibile, ma la risoluzione con strategia "linear-input" produce sempre clausole che hanno almeno un letterale, e quindi non è in grado di derivare la clausola vuota.

Se ci si limita, però, a un sottoinsieme delle clausole, in particolare alle clausole di Horn, allora la strategia ***"linear-input" è completa***.


LOGICA DEI PREDICATI DEL PRIMO ORDINE
Simboli ed espressioni non interpretati
Interpretazione
SINTASSI
SEMANTICA
Correttezza
DIMOSTRAZIONE DI TEOREMI
CONSEGUENZA LOGICA
Teorie assiomatico-deduttive
Completezza
Prova automatica di teoremi
PRINCIPIO DI RISOLUZIONE
clausole
PROGRAMMAZIONE LOGICA
clausole di Horn

# LE CLAUSOLE DI HORN

- *La logica a clausole di Horn è un sottoinsieme della logica a clausole*
- **Le clausole di Horn hanno al più un letterale positivo.**
- *Le clausole possono essere scritte in una forma equivalente sostituendo al simbolo di disgiunzione $\vee$ e negazione ~ il simbolo di implicazione logica ($\rightarrow$) ricordando che:*

  $\sim B \vee A$ *equivale a* $B \rightarrow A$

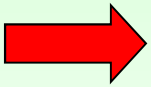
- *Nel seguito si indicherà l'implicazione logica $B \rightarrow A$ con:*

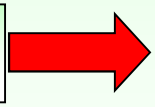
  $A \leftarrow B$ *("B implica A", oppure "A se B").*

- *La clausola:* $A_1 \vee \ldots \vee A_n \vee \sim B_1 \vee \ldots \vee \sim B_m$
- *può essere riscritta come:* $A_1,\ldots,A_n \leftarrow B_1,\ldots,B_m$
- *dove i simboli "," che separano gli atomi $A_i$ sono da interpretare come disgiunzioni, mentre quelli che separano gli atomi $B_j$ sono congiunzioni.*
- *Clausole di Horn:* $A \leftarrow B_1,\ldots,B_m$ $\leftarrow B_1,\ldots,B_m$ *Goal*

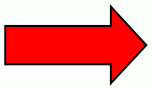
# Potenza Espressiva delle Clausole di Horn

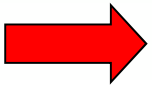
- Molte formule della logica dei predicati possono essere scritte come clausole di Horn.
- Esempi:

$\forall x\ cat(x) \vee dog(x) \rightarrow pet(x)$  $pet(x) \leftarrow cat(x)$, $pet(x) \leftarrow dog(x)$

$\forall x\ poodle(x) \rightarrow dog(x) \wedge small(x)$  $dog(x) \leftarrow poodle(x)$, $small(x) \leftarrow poodle(x)$

- MA:

$\forall x\ human(x) \rightarrow male(x) \vee female(x)$  ????

$\forall x\ dog(x) \wedge \sim abnormal(x) \rightarrow has\_4\_legs(x)$  ????

# ESEMPIO

H={on(b1,tavolo)∧on(b2,tavolo))∧ ((colore(b1,rosso)∨colore(b2,rosso)))}

è esprimibile in clausole, ma non in clausole di Horn.

- La sua trasformazione in clausole risulterà infatti:

  $H^C$={on(b1,tavolo),on(b2,tavolo), colore(b1,rosso) ∨colore(b2,rosso)}

  dove la clausola: colore(b1,rosso) ∨ colore(b2,rosso)
  non è una clausola di Horn.

- Risoluzione per le clausole di Horn: **risoluzione SLD** *resolution with **S**election rule, **L**inear input strategy for **D**efinite clauses*

- Risoluzione SLD opera per contraddizione e quindi si procede negando la formula F da dimostrare.

- Poiché F è una congiunzione di formule atomiche quantificate esistenzialmente, la sua negazione produrrà una disgiunzione di formule atomiche negate quantificata universalmente, cioè una clausola di Horn goal.

# Esempio KB

- The law says that it is a crime for an American to sell weapons to hostile nations. The country Nono, an enemy of America, has some missiles, and all of its missiles were sold to it by Colonel West, who is American.

- Dimostra che "Col. West is a criminal"

- Nella traduzione useremo una diversa (inversa) notazione(Russel-Norvig): Variabili x,y,z ecc; Costanti con una maiuscola.

# Esempio KB (cont)

… it is a crime for an American to sell weapons to hostile nations:

*American(x) ∧ Weapon(y) ∧ Sells(x,y,z) ∧ Hostile(z) ⇒ Criminal(x)*

Nono … has some missiles, i.e., ∃x Owns(Nono,x) ∧ Missile(x):

*Owns(Nono,$M_1$) and Missile($M_1$)*

… all of its missiles were sold to it by Colonel West

*Missile(x) ∧ Owns(Nono,x) ⇒ Sells(West,x,Nono)*

Missiles are weapons:

*Missile(x) ⇒ Weapon(x)*

An enemy of America counts as "hostile“:

*Enemy(x,America) ⇒ Hostile(x)*

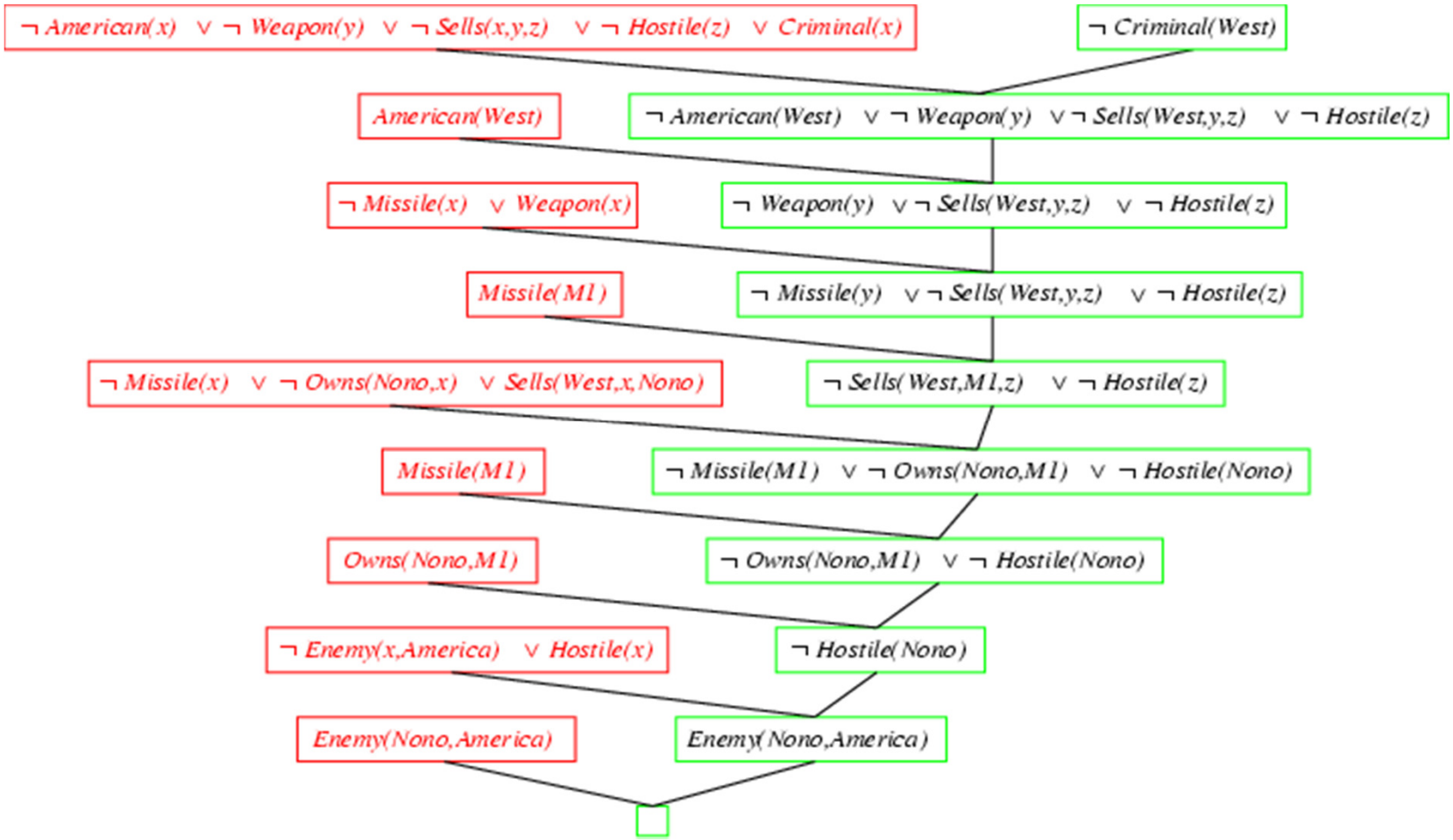
West, who is American …

*American(West)*

The country Nono, an enemy of America …

*Enemy(Nono,America)*

# Risoluzione linear-input: clausole definite

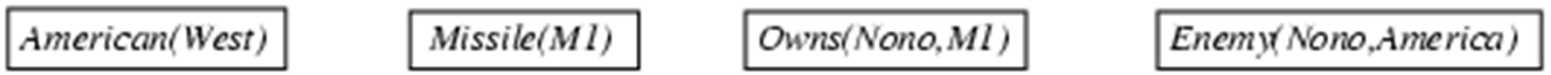


# Forward e backward chaining: Modus Ponens Generalizzato (GMP)

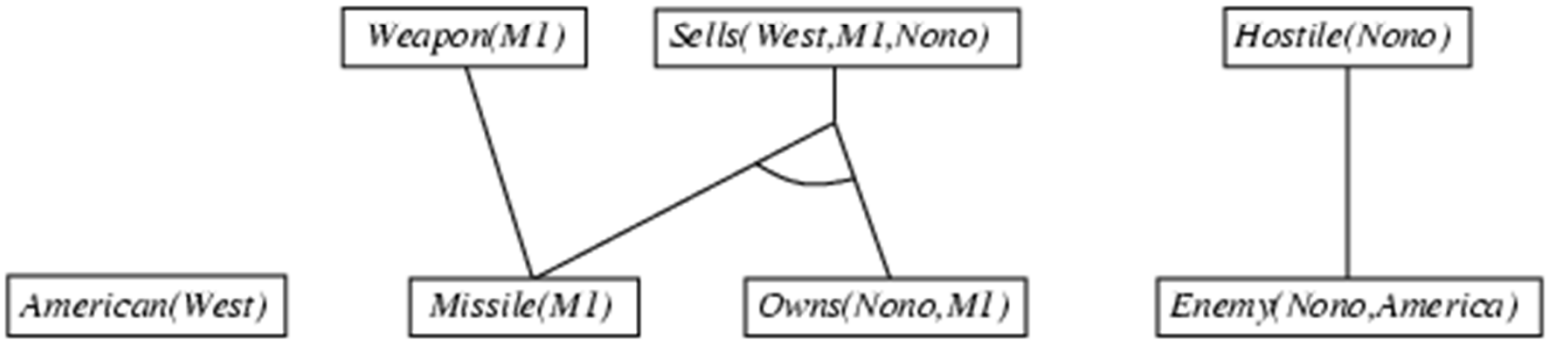
$$\frac{p_1', p_2', \ldots, p_n', (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \Rightarrow q)}{q\theta}$$ dove $p_i'\theta = p_i\theta$ per ogni $i$

- Utilizzato con KB di clausole definite (esattamente un letterale positivo)
- Tutte le variabili sono universalmente quantificate.
- Corrisponde alla risoluzione con strategia linear input

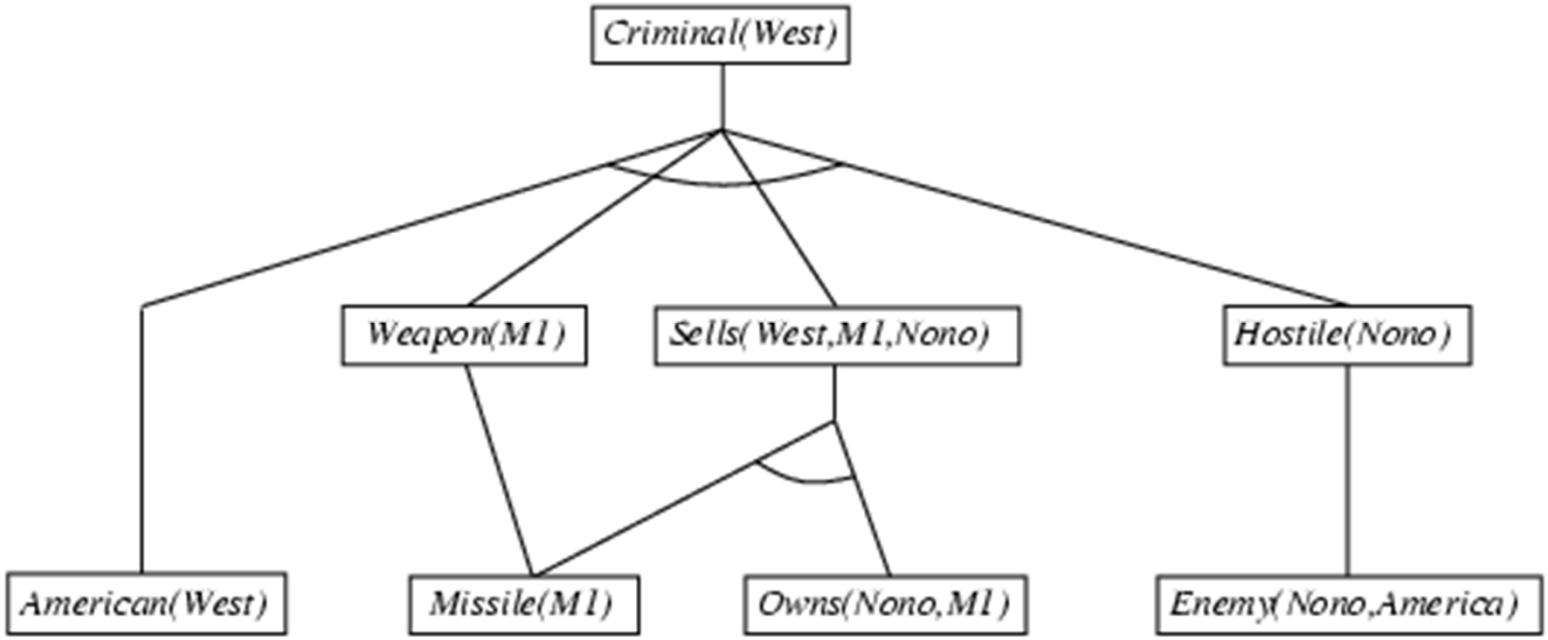
# Forward chaining



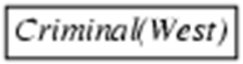
# Forward chaining



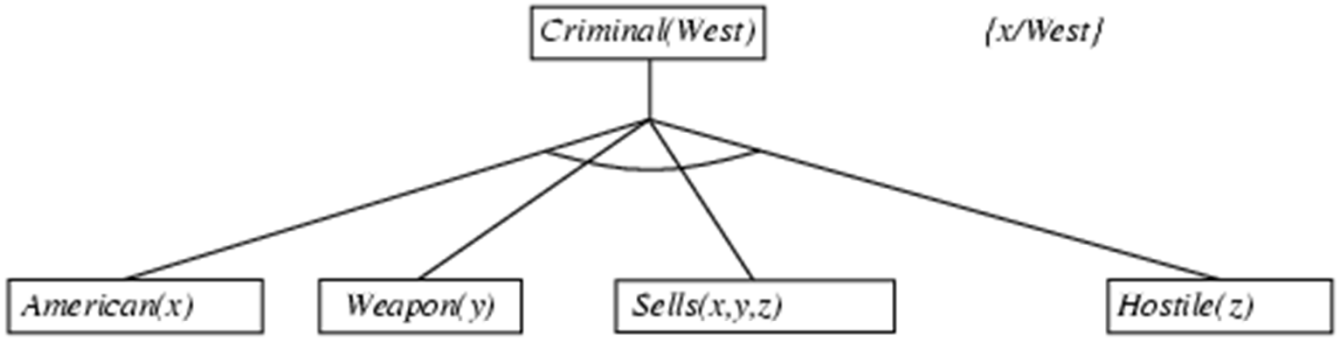
# Forward chaining



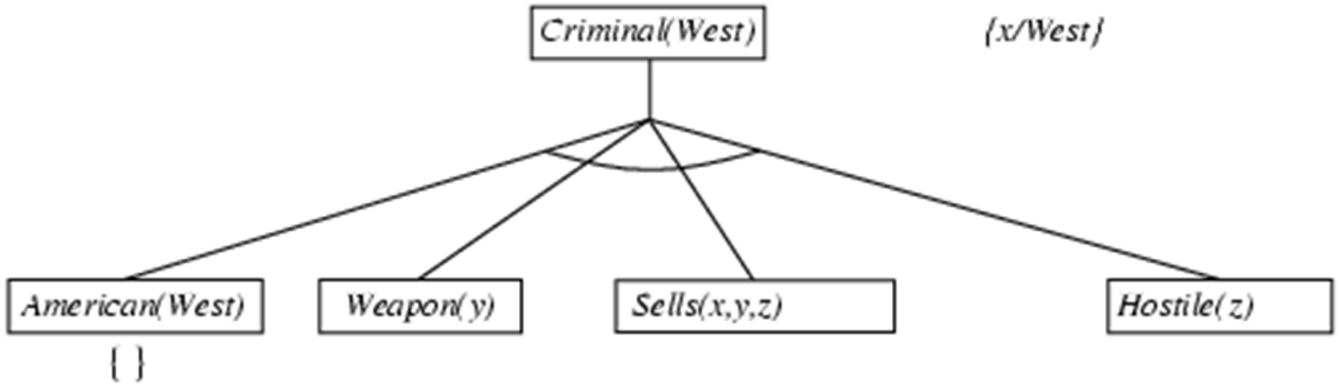
# Backward chaining



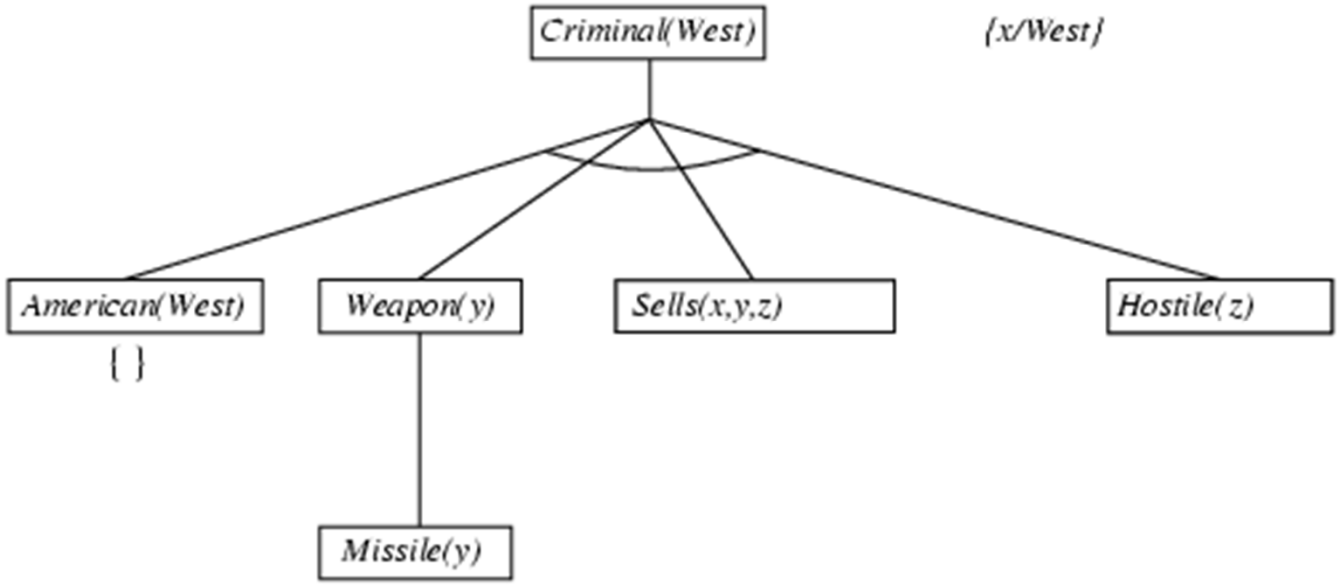
# Backward chaining



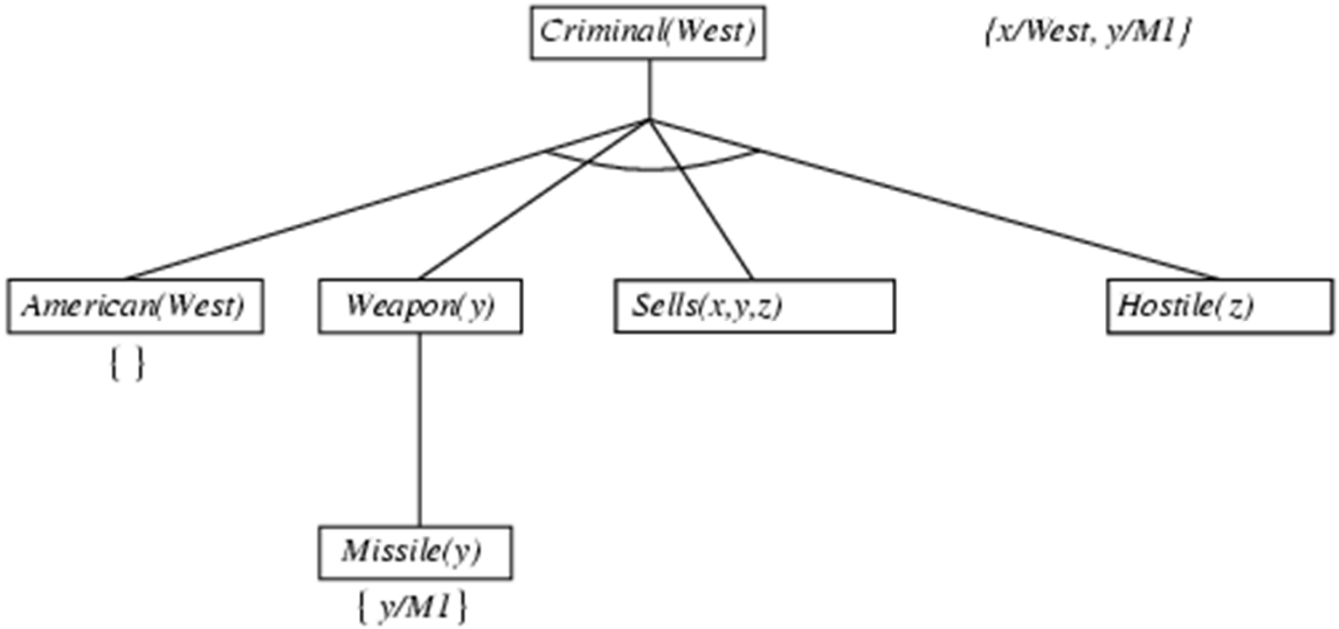
# Backward chaining



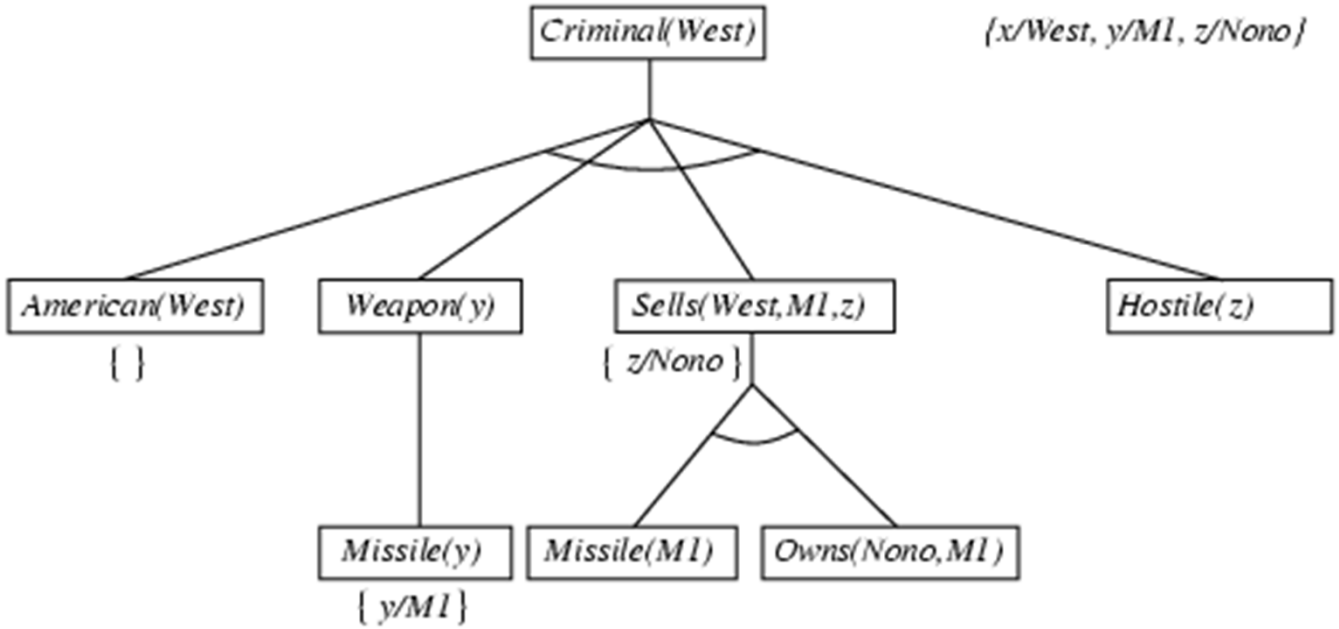
# Backward chaining



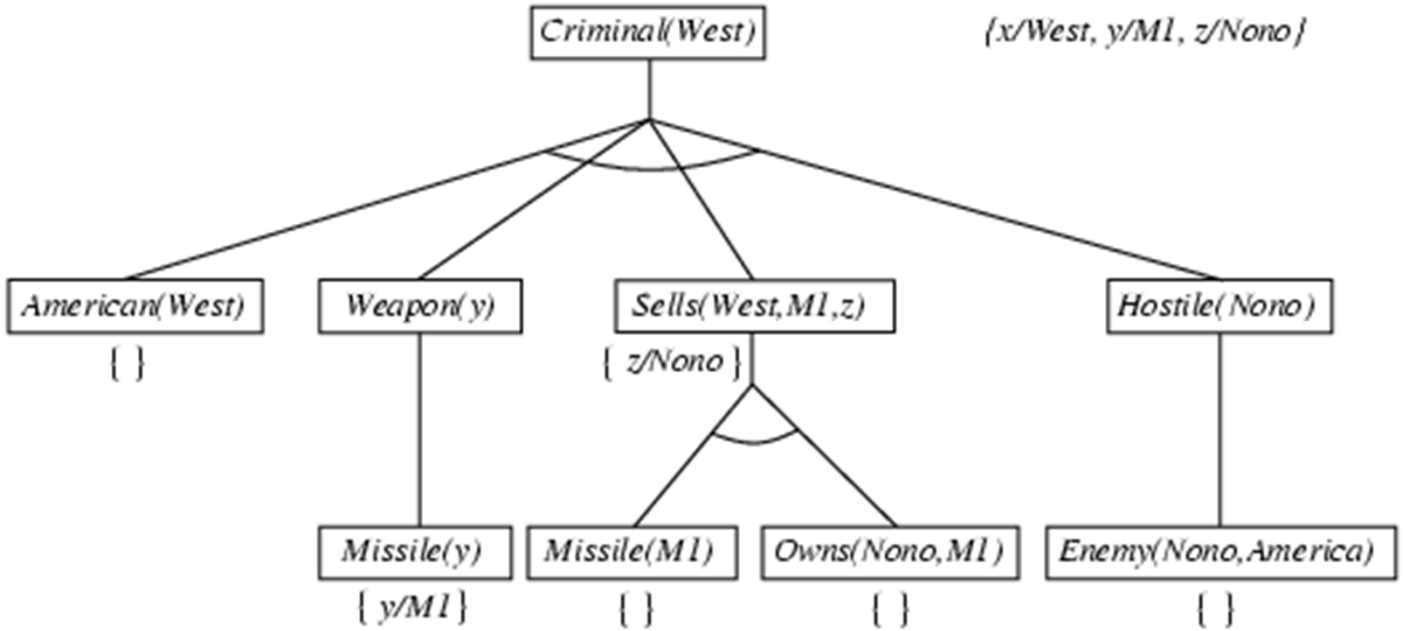
# Backward chaining



# Backward chaining



# Backward chaining



# Backward chaining