Abbiamo visto…

- Gli agenti logici applicano inferenze a una base di conoscenza per derivare nuove informazioni.

- Concetti base della logica:
  - sintassi: struttura formale delle sentenze
  - semantica: verita` di sentenze rispetto ad interpretazioni/modelli
  - conseguenza logica (entailment): sentenza necessariamente vera data un'altra sentenza
  - inferenza: derivare (sintatticamente) sentenze da altre sentenze
  - correttezza (soundness): la derivazione produce solo sentenze che sono conseguenza logica.
  - Completezza (completeness): la derivazione puo' prdurre tutte le conseguenze logiche.

Logica Proposizionale:

- E' la logica piu' semplice, ma non molto espressiva. Non possiamo esprimere variabili (solo enumerazione di tutti gli elementi)

- Se S, S_1, S_2 sono sentenze allora sono anche sentenze:

  - $\neg S$ (negazione)
  - $S_1 \wedge S_2$ (congiunzione)
  - $S_1 \vee S_2$ (disgiunzione)
  - $S_1 \Rightarrow S_2$ (implicazione)
  - $S_1 \Leftrightarrow S_2$ (bicondizionale)

Dimostrazioni in logica proposizionale

- Vedremo la dimostrazione basata su
  - Risoluzione (corretta e completa per clausole generali)
  - Forward chaining (corretta e completa per clausole Horn)
  - Backward chaining (corretta e completa per clausole Horn)

- Una qualunque fbf della logica proposizionale si puo' trasformare in un equivalente insieme di clausole generali (formule SP o PS vedi reti logiche ed algebra di Boole).

IL PRINCIPIO DI RISOLUZIONE

- Sistema di deduzione per la logica a clausole per il quale valgono interessanti proprietà.

- Regola di inferenza**: Principio di Risoluzione** [Robinson 65], che si applica a teorie del primo ordine in **forma a clausole**.

- È la regola di inferenza base utilizzata nella programmazione logica.

CLAUSOLE

- Una **clausola** è una disgiunzione di letterali (cioè formule atomiche negate e non negate), in cui tutte le variabili sono quantificate universalmente in modo implicito.
- Una clausola generica può essere rappresentata come la disgiunzione:

  $A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n \vee \sim B_1 \vee ... \vee \sim B_m$

  dove A_i (i=1,..,n) e B_j (j=1,..,m) sono atomi.
- Una clausola nella quale non compare alcun letterale, sia positivo sia negativo, è detta clausola vuota e verrà indicata con □. interpretato come contraddizione: disgiunzione falso $\vee$ ~vero
- Un sottoinsieme delle clausole è costituito dalle **clausole definite**, nelle quali si ha sempre un solo letterale positivo:

  $A_1 \vee \sim B_1 \vee \ldots \vee \sim B_m$

IL PRINCIPIO DI RISOLUZIONE

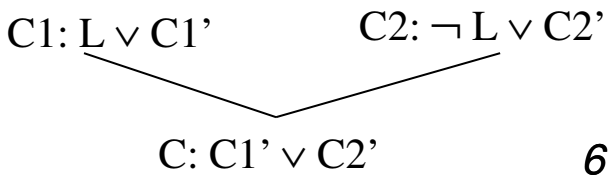
- Il principio di risoluzione, che si applica a formule in forma a clausole, è utilizzato dalla maggior parte dei risolutori automatici di teoremi.
- **Logica Proposizionale:** clausole prive di variabili.
- Siano C_1 e C_2 due clausole prive di variabili:

  $C_1 = A_1 \vee ... \vee A_n$ $\qquad\qquad$ $C_2 = B_1 \vee ... \vee B_m$

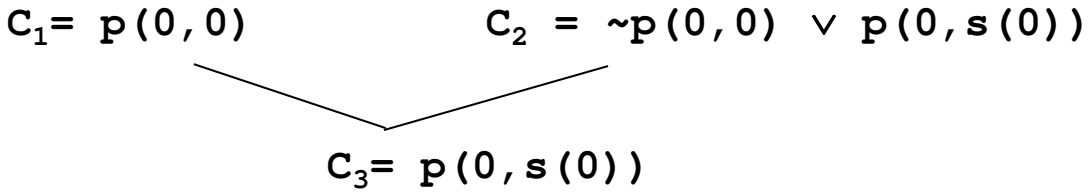
- Se esistono in C_1 e C_2 due letterali **opposti**, A_i e B_j, ossia tali che $A_i = \sim B_j$, allora da C_1 e C_2, (clausole **parent**) si può derivare una nuova clausola C_3, denominata **risolvente**, della forma:

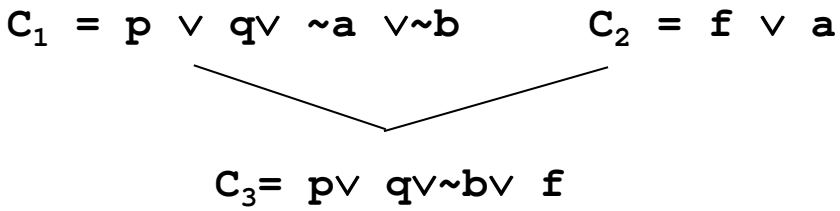
  $C_3 = A_1 \vee .. \vee A_{i-1} \vee A_{i+1} \vee .. \vee A_n \vee B_1 \vee .. \vee B_{j-1} \vee B_{j+1} \vee ... \vee B_m$

- **C_3 è conseguenza logica di $C_1 \cup C_2$.**



ESEMPI





DIMOSTRAZIONE PER CONTRADDIZIONE ATTRAVERSO LA RISOLUZIONE (1)

- Dati gli assiomi propri H di una teoria e una formula F, derivando da $H \cup \{\sim F\}$ la contraddizione logica si dimostra che F è un teorema della teoria.
- 1) Ridurre H e il teorema negato ~F in forma a clausole.

  H trasformato nell'insieme di clausole H^C: $H \rightarrow H^C$

  F negata e trasformata nell'insieme di clausole F^C: $\sim F \rightarrow F^C$
- 2) **All'insieme $H^C \cup F^C$ si applica la risoluzione**

  Se F è un teorema della teoria, allora la risoluzione deriva la contraddizione logica (clausola vuota) in un numero finito di passi.
- **Contraddizione:** Nella derivazione compariranno due clausole del tipo A e ~B con A e B formule atomiche unificabili.

DIMOSTRAZIONE PER CONTRADDIZIONE ATTRAVERSO LA RISOLUZIONE (2)

- Per dimostrare F, il metodo originario (Robinson) procede generando i risolventi per **tutte le coppie** di clausole dell'insieme di partenza $C_0 = H^C \cup F^C$ che sono aggiunti a C_0. Procedimento iterato, fino a derivare, se è possibile, la clausola vuota.
- 1. $C_{i+1} = C_i \cup \{\text{risolventi delle clausole di } C_i\}$
- 2. Se C_{i+1} contiene la clausola vuota, termina.
- Altrimenti ripeti il passo 1.

ESEMPIO

$H = \{(a \rightarrow c \vee d) \wedge (a \vee d \vee e) \wedge (a \rightarrow \sim c)\}$

$F = \{d \vee e\}$

- La trasformazione in clausole di H e ~F produce:

$H^C = \{\sim a \vee c \vee d,\ a \vee d \vee e,\ \sim a \vee \sim c\}$

$F^C = \{\sim d,\ \sim e\}$ (cioe' $\sim(d \vee e)$)

- Si vuole dimostrare che $H^C \cup F^C$:

$\{\sim a \vee c \vee d$ (1)

$a \vee d \vee e$, (2)

$\sim a \vee \sim c$, (3)

$\sim d$, (4)

$\sim e\}$ (5)

- è contraddittorio.

ESEMPIO

- **Tutti i possibili risolventi al passo 1 sono:**

{c ∨ d ∨ e, (6) da (1) e (2)

d ∨ e ∨ ~c, (7) da (2) e (3)

~a ∨ c, (8) da (1) e (4)

a ∨ e, (9) da (2) e (4)

a ∨ d, (10) da (2) e (5)

~a ∨ d} (11) da (1) e (3)

- **Al passo 2, da (10) e (11) viene derivato il risolvente:**

d (12)

e al passo 3, da (4) e (12) viene derivata anche la clausola vuota.

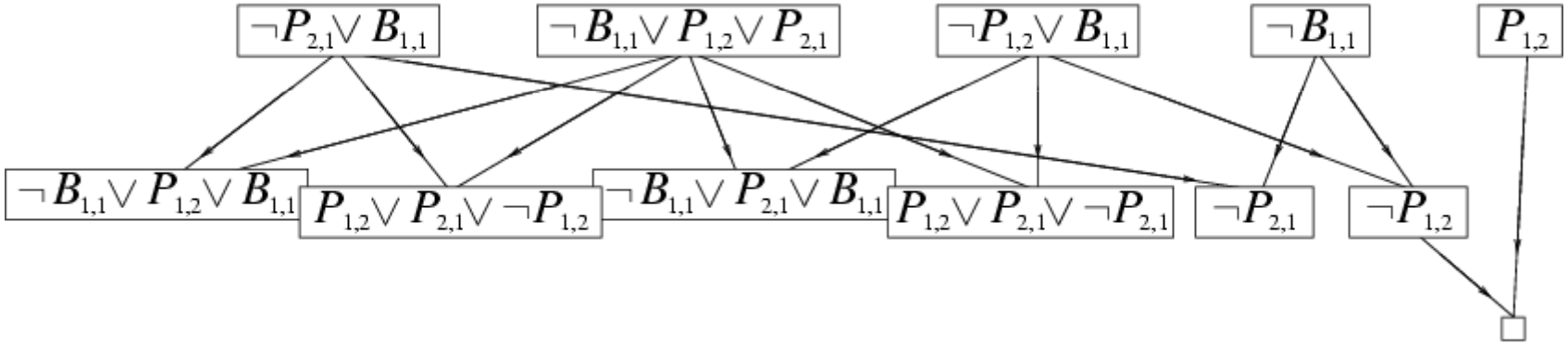
Algoritmo di Risoluzione per PL (Logica Proposizionale)

- Per contraddizione, i.e., $KB \wedge \neg \alpha$ e' insoddisfacibile

```
function PL-RESOLUTION(KB, α) returns true or false
    clauses ← the set of clauses in the CNF representation of KB ∧ ¬α
    new ← { }
    loop do
        for each C_i, C_j in clauses do
            resolvents ← PL-RESOLVE(C_i, C_j)
            if resolvents contains the empty clause then return true
            new ← new ∪ resolvents
        if new ⊆ clauses then return false
        clauses ← clauses ∪ new
```

Esempio di Risoluzione

- $KB = (B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})) \wedge \neg B_{1,1}$
- $\alpha = \neg P_{1,2}$



Forward e backward chaining

- Horn Form (sootinsieme della logica proposizionale)
  KB = congiunzione di clausole di Horn
  - Clausole di Horn =
    - Proposizioni atomiche; o
    - (congiunzione di proposizioni atomiche) $\Rightarrow$ proposizione atomica
  - E.g. KB = $C \wedge (B \Rightarrow A) \wedge (C \wedge D \Rightarrow B)$

- Modus Ponens (per Horn): completo per Horn KB

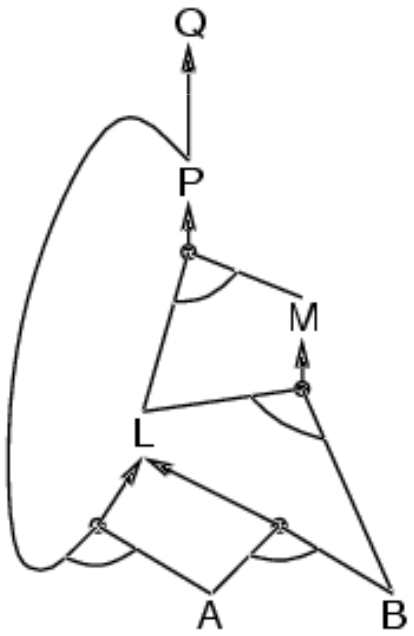
$$\frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \qquad \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \Rightarrow \beta}{\beta}$$

- Puo' essere usato sia per forward chaining o backward chaining.
  Algoritmi molto naturali e con compessita` lineare in tempo.

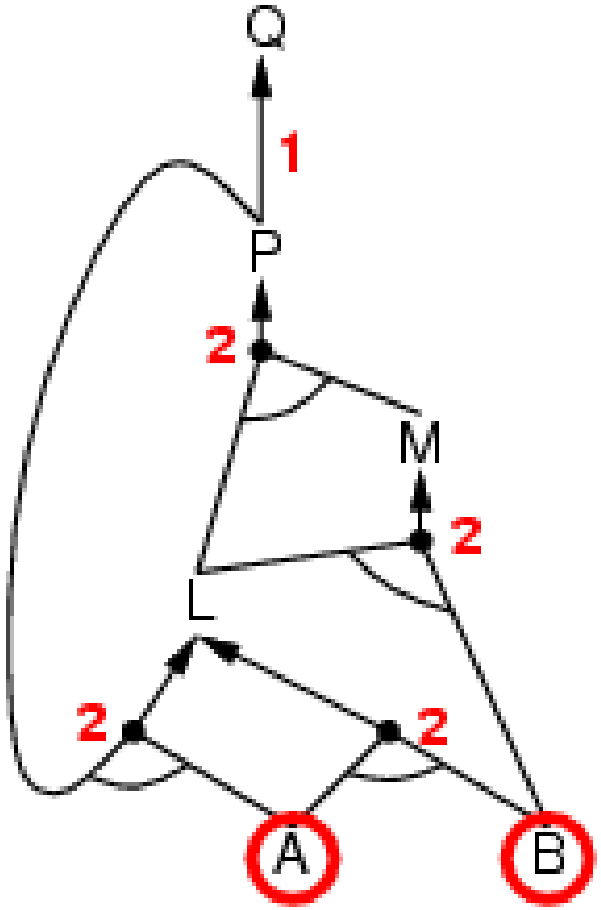
Forward chaining

- Idea: applica tutte le regole le cui premesse sono soddisfatte nella *KB*,
  - Aggiungi le conclusioni alla *KB*, fino a trovare la query

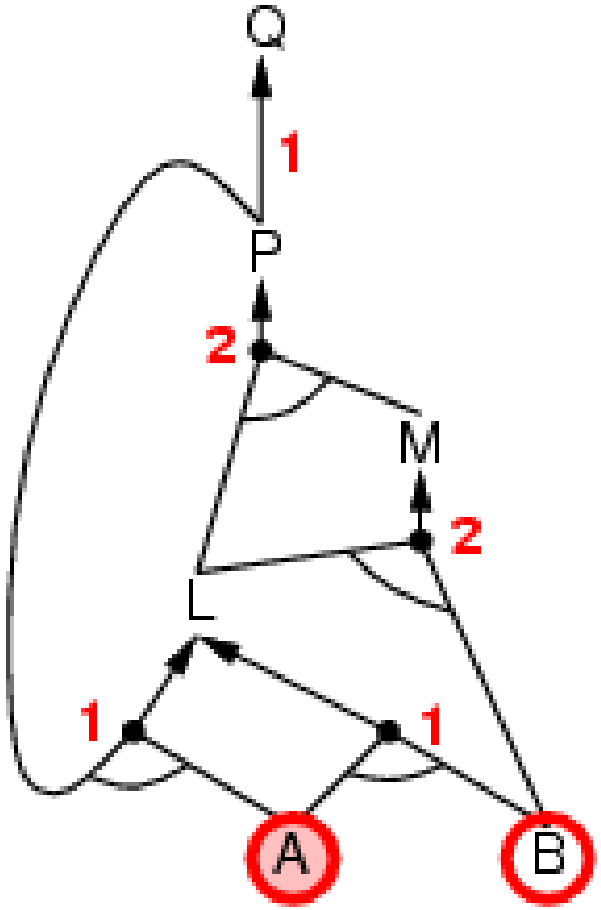
$$P \Rightarrow Q$$
$$L \wedge M \Rightarrow P$$
$$B \wedge L \Rightarrow M$$
$$A \wedge P \Rightarrow L$$
$$A \wedge B \Rightarrow L$$
$$A$$
$$B$$



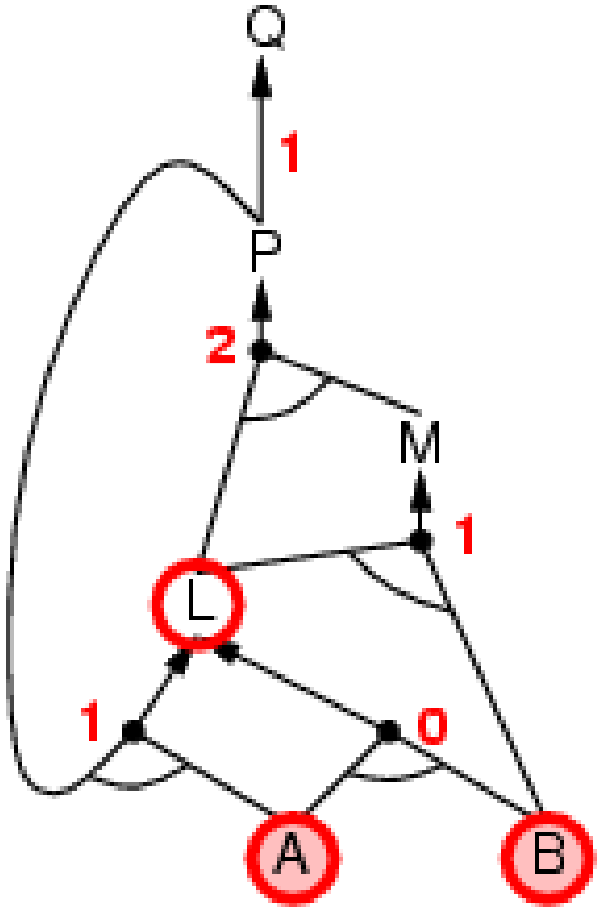
Forward chaining: esempio



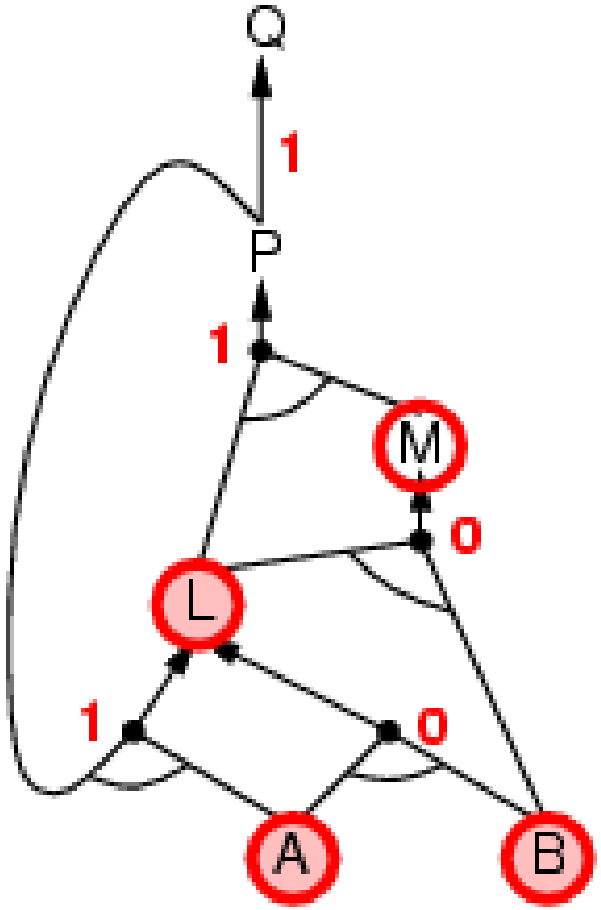
Forward chaining : esempio



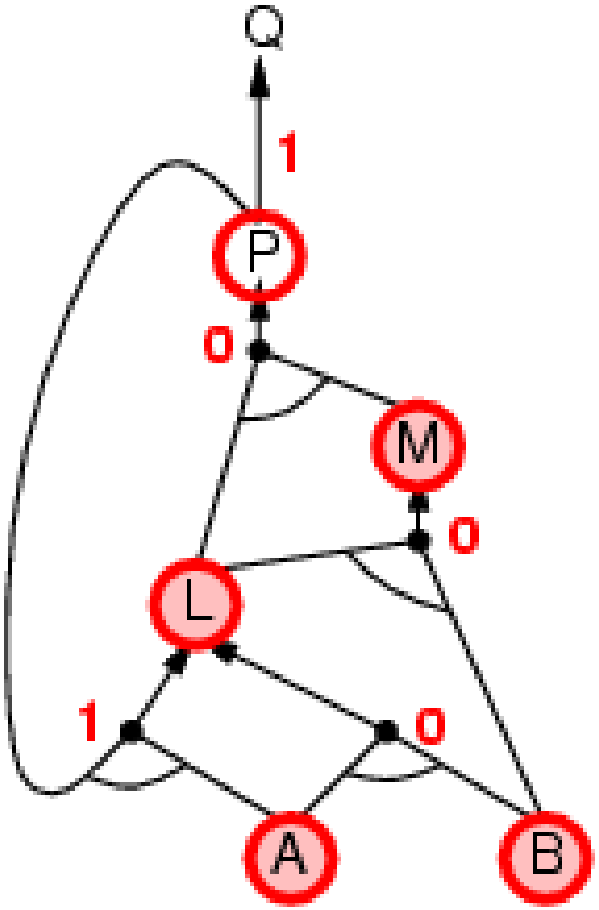
Forward chaining : esempio



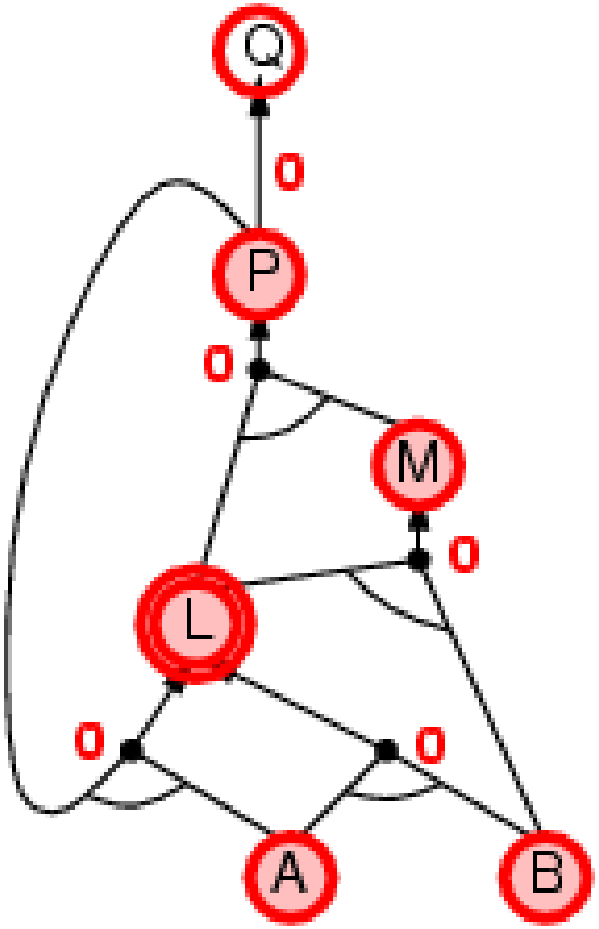
Forward chaining : esempio



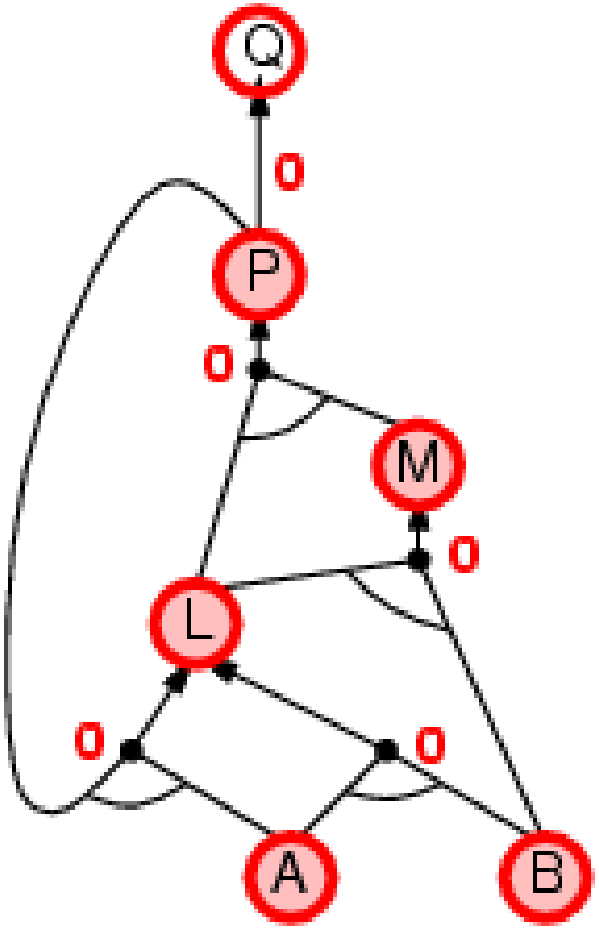
Forward chaining : esempio



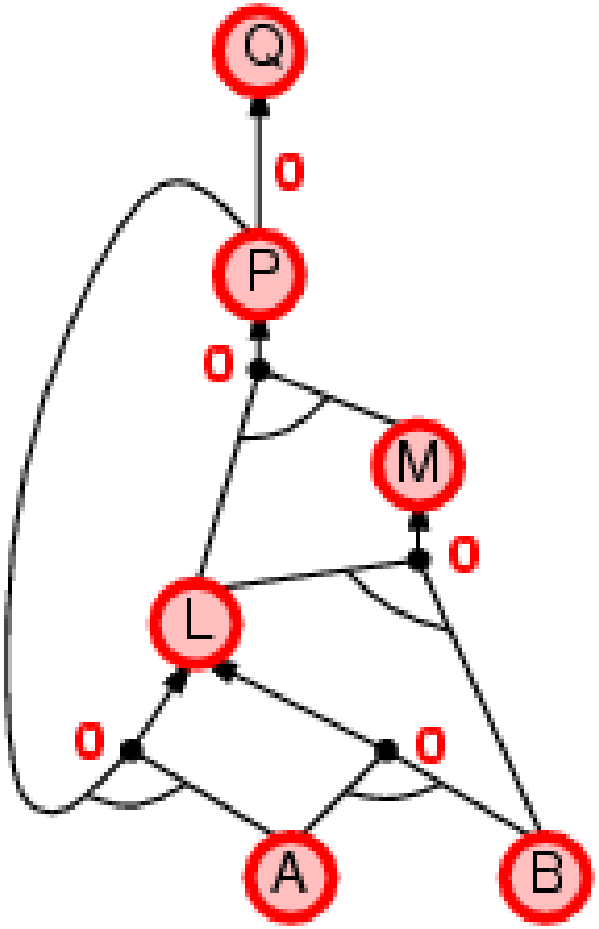
Forward chaining : esempio



Forward chaining : esempio



Forward chaining : esempio



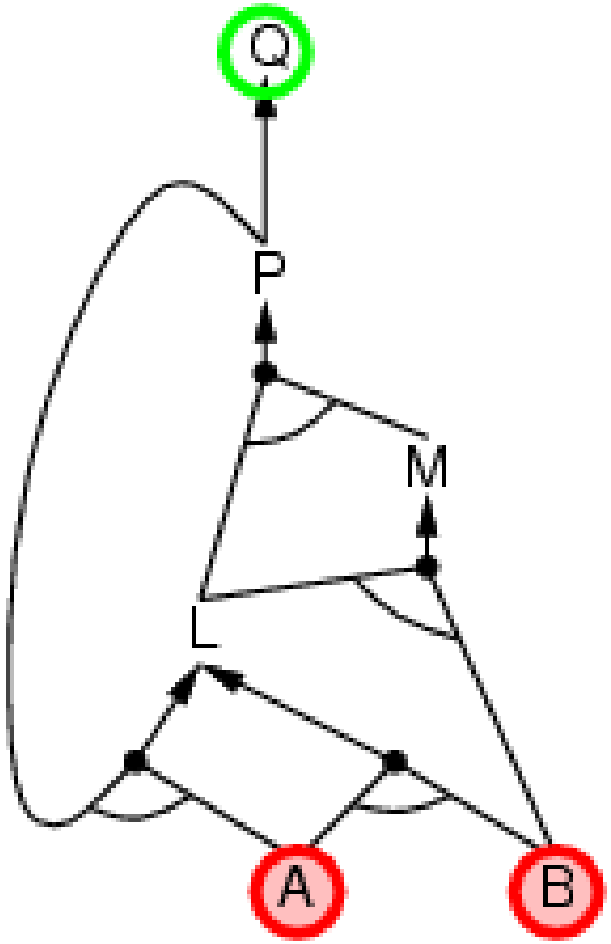
Backward chaining (BC)

- Idea: lavora backwards dalla query (goal) *q*:
  - Per dimostrare *q*
    - Conrolla se *q* e' gia noto, oppure,
    - Dimostra attraverso BC tutte le premesse di una qualche regola che conclude *q*

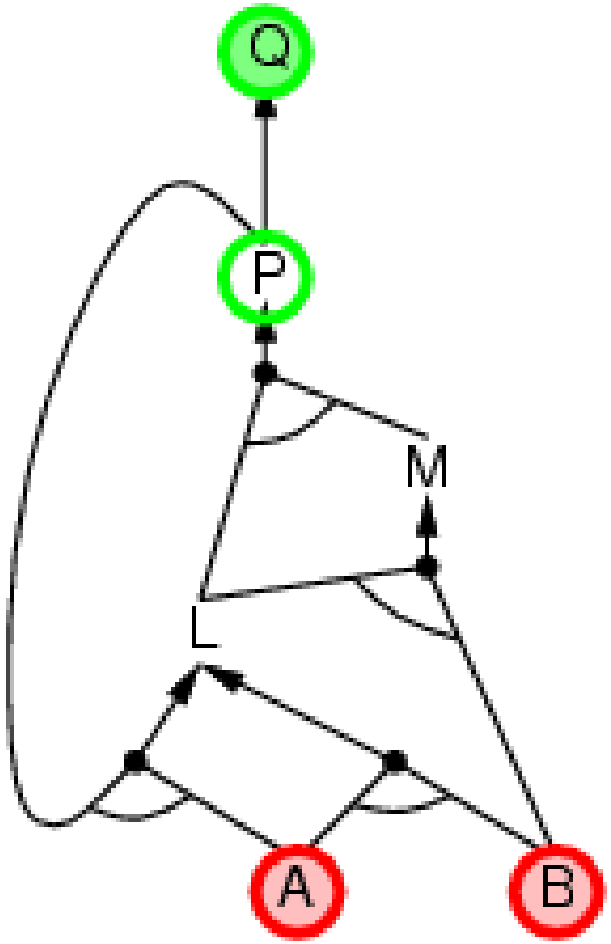
- Per evitare loops: controlla se i nuovi sottogoals sono gia' nello stack dei goals

- Evita di ripetere lavoro controllando se I nuovi sottogoal sono gia' stati dimostrati veri o falsi.

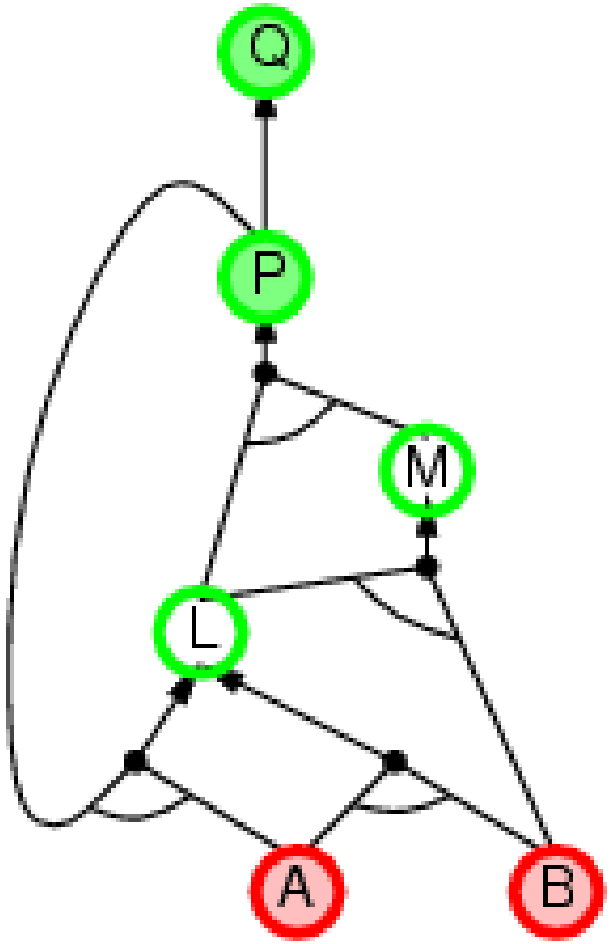
Backward chaining : esempio



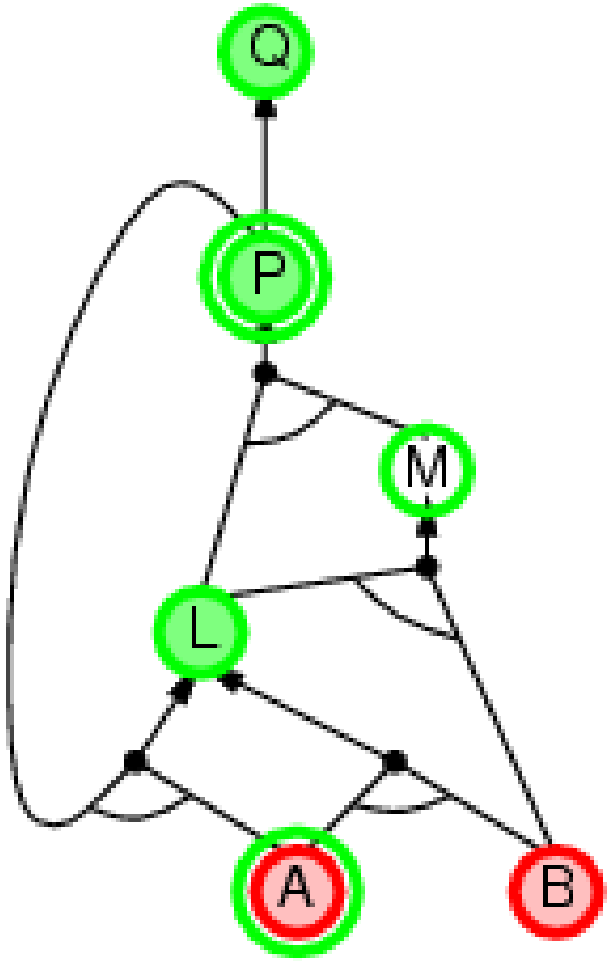
Backward chaining : esempio



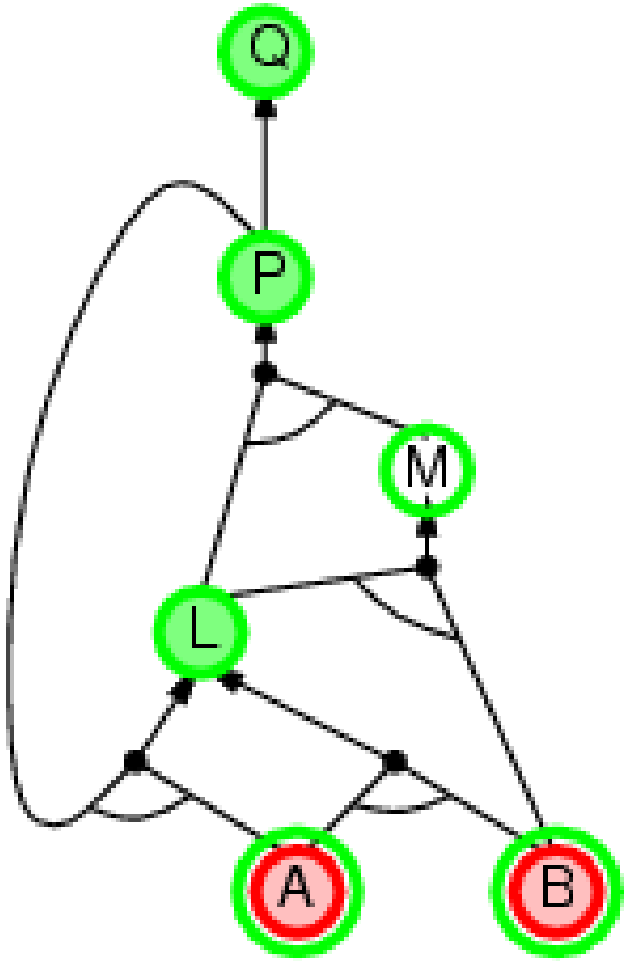
Backward chaining : esempio



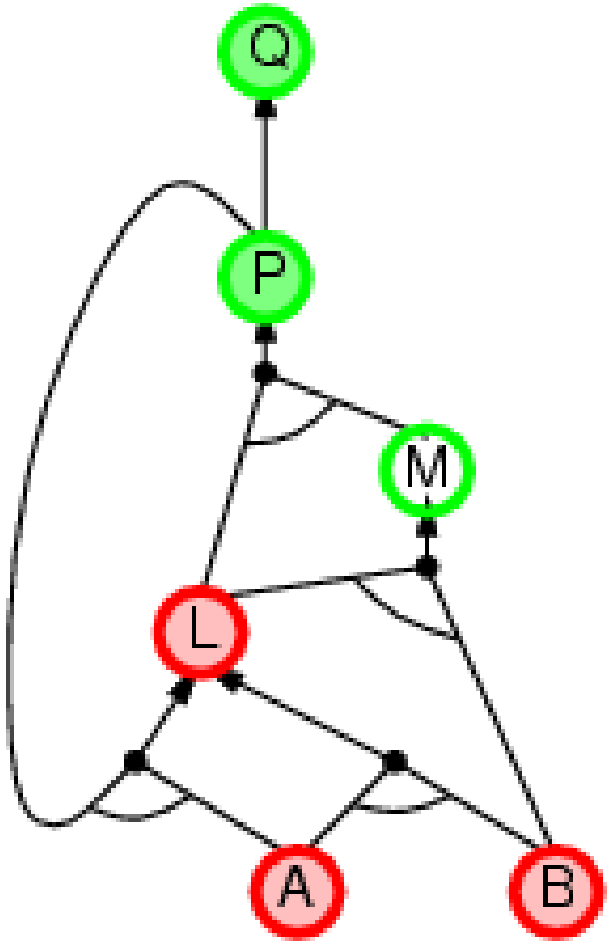
Backward chaining : esempio



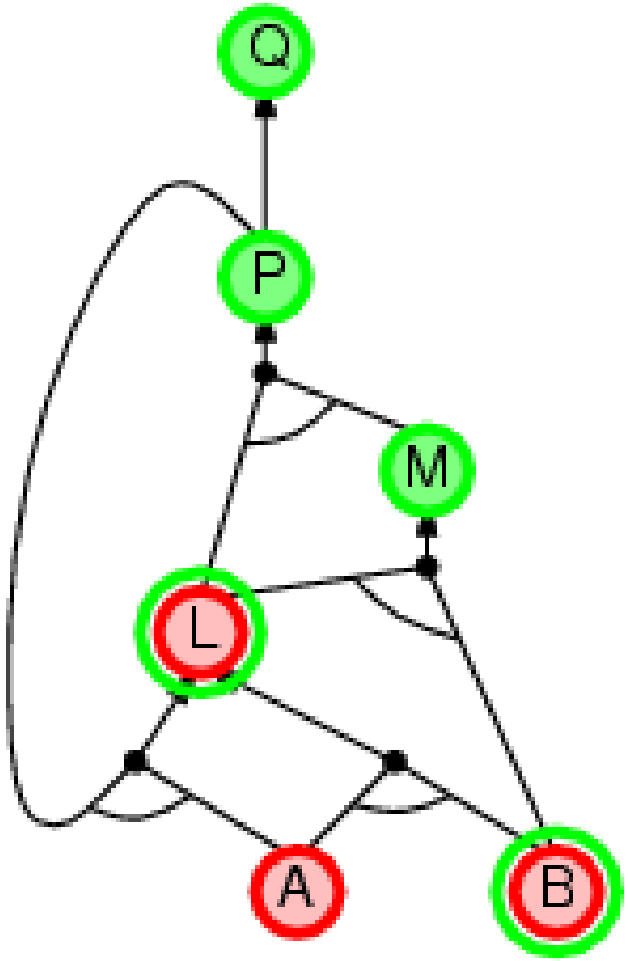
Backward chaining : esempio



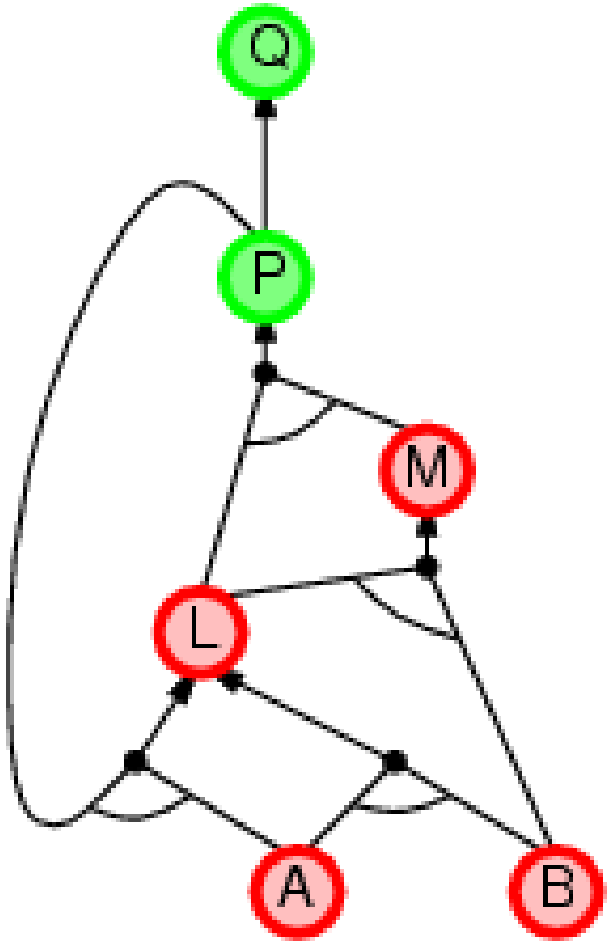
Backward chaining : esempio



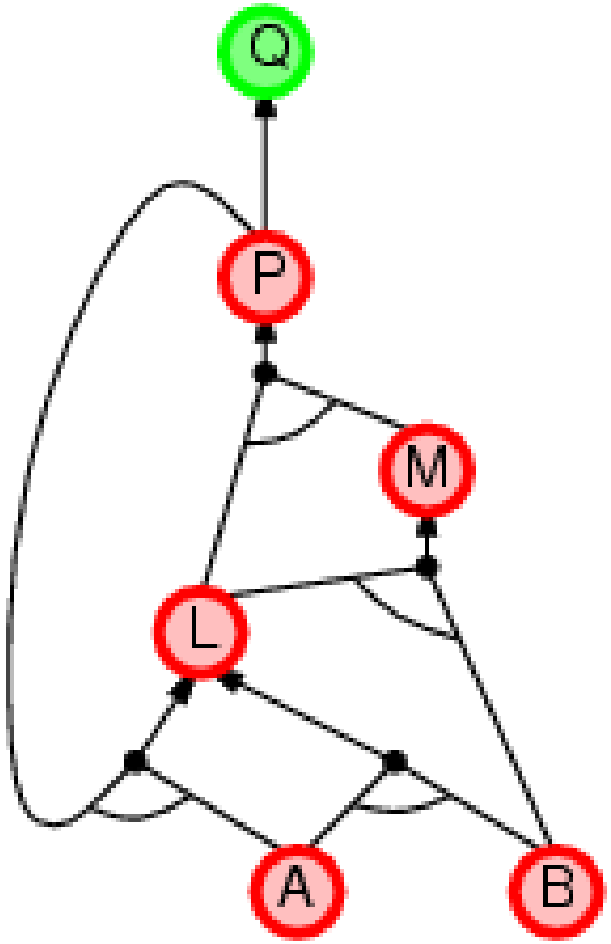
Backward chaining : esempio



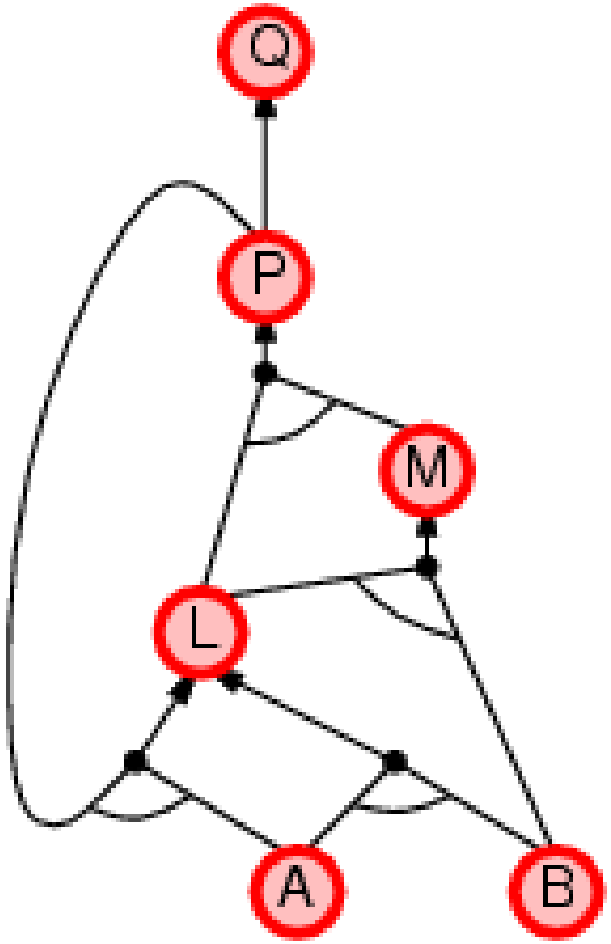
Backward chaining : esempio



Backward chaining : esempio



Backward chaining : esempio



Forward vs. backward chaining

- FC e' data-driven,
  - e.g., monitoring, configurazione, interpretazione
  - Non si concentra sull'obiettivo
- BC e' goal-driven, quindi in generale piu' appropriato per il problem-solving

Sommario

- La risoluzione e' completa per la logica proposizionale
- Forward, backward chaining sono complete per le clausole di Horn
- La logica proposizionale e' troppo povera dal punto di vista espressivo.