TIPOLOGIE ESERCIZI SUI VINCOLI

- Si hanno due categorie di esercizi:
  - Modellazione + risoluzione
  - Risoluzione data la modellazione sotto forma di variabili e vincoli oppure di grafo

- Per la risoluzione:
  - Tecniche di consistenza sul problema originale
  - Algoritmi di propagazione + ricerca
  - Tecniche di consistenza + ricerca

ESERCIZIO 1

Si hanno 4 insegnanti a, b, c e d che devono tenere complessivamente 10 lezioni. Ogni lezione può essere tenuta da un solo insegnante. Delle 10 lezioni si conoscono l'inizio Si e la durata Di =2 ore. Inoltre, si sa che nessun insegnante può tenere due lezioni consecutive e nemmeno lezioni sovrapposte temporalmente. Si rappresenti il problema come problema di soddisfacimento di vincoli definendo le variabili, i domini delle variabili e i vincoli tra queste. Si supponga inoltre che le lezioni abbiano i seguenti inizi:

- S1 = 7
- S2 = 8
- S3 = 9
- S4 = 10
- S5 = 11
- S6 = 12
- S7 = 13
- S8 = 14
- S9 = 15
- S10 = 16

e durata di due ore. Si imposti la soluzione del problema utilizzando come tecnica il forward checking.

SOLUZIONE: MODELLAZIONE

Variabili: ore di lezione X1...X10
Domini: insegnanti [a,b,c,d]
Le ore di lezione sono caratterizzate da un inizio Si e da una durata Di nota.

Vincoli:
Unari: appartenenza delle variabili ai domini
Binari:

- Ogni ora di lezione può essere tenuta da un solo insegnante: ogni variabile viene istanziata con un solo valore.
- Ogni insegnante non può tenere due ore consecutive di lezione:
  $Si + Di = Sj \rightarrow Xi \neq Xj$
- Ogni insegnante non può tenere due ore sovrapposte di lezione:
  $Si + Di > Sj$ and $Si + Di \leq Sj + Dj \rightarrow Xi \neq Xj$.

SOLUZIONE: RICERCA

Inizialmente X1...X10 :: [a,b,c,d]

- Istanzio X1= a
- Propago: X2 X3:: [b,c,d], X4 ...X10:: [a,b,c,d]
- Istanzio X2= b
- Propago: X3:: [c,d], X4 :: [a,c,d], X5 ...X10:: [a,b,c,d]
- Istanzio X3= c
- Propago: X4 :: [a,d], X5:: [a,b,d] , X6...X10:: [a,b,c,d]
- Istanzio X4 = a
- Propago: X5:: [b,d] , X6 :: [b,c,d], X7...X10:: [a,b,c,d]
- Istanzio X5=b
- Propago X6 :: [c,d], X7:: [a,c,d] , X8...X10:: [a,b,c,d]
- Istanzio X6=c
- Propago X7 :: [a,d], X8:: [a,b,d] , X9...X10:: [a,b,c,d]
- Istanzio X7 = a
- Propago X8:: [b,d], X9:: [b,c,d], X10:: [a,b,c,d]
- Istanzio X8 = b
- Propago X9:: [c,d], X10:: [a,c,d]
- Istanzio X9 = c
- Propago X10:: [a,d]
- Istanzio X10 = a soluzione

OSSERVAZIONE

- Si noti che esiste un'altra possibile rappresentazione del problema che associa agli insegnanti una variabile il cui dominio contiene inizialmente tutte le lezioni. I vincoli potrebbero eliminare dai domini quelle lezioni che sono incompatibili con i vincoli sull'insegnante. Tuttavia, questa rappresentazione non rientra nell'ottica dei problemi di soddisfacimento di vincoli in quanto in una soluzione deve essere assegnato UNO E UN SOLO valore a ogni variabile e non un insieme di valori come nel caso di questa seconda rappresentazione. Infatti, in quest'ultimo caso una possibile soluzione avrebbe

- Xa::[1,4,7]

che significa che il maestro a può tenere le lezioni 1, 4 e 7.

ESERCIZIO 2

Data una scacchiera 4 x 4 e 4 colori [r,b,g,y], si deve collocare un colore in ciascuna cella della scacchiera modo che ogni riga, ogni colonna e le due diagonali principali della scacchiera contengano colori diversi.

Si formalizzi il problema come CSP, e lo si risolva fino alla prima soluzione tramite la tecnica del forward checking con euristica first-fail (anche detta Minimum Remaining Values MRV)

SOLUZIONE

- Si considera una scacchiera 4 x 4. Ogni cella della scacchiera rappresenta una variabile da X_{11} a X_{44}. I domini iniziali delle variabili sono composti dai quattro colori a disposizione.
- I vincoli sono
- per ogni i $Xij \neq Xik$ per $j \neq k$
- per ogni i $Xji \neq Xki$ per $j \neq k$
- per ogni i e j $Xii \neq Xjj$ con $i \neq j$
- per ogni i e j $Xi,4-i+1 \neq Xj,4-j+1$ con $i \neq j$
- Rappresentiamo i domini all'interno delle celle della scacchiera. Con il forward checking si arriva ad una soluzione senza mai fallire.

ESERCIZIO 2

r,b y,g	r,b y,g	r,b y,g	r,b y,g
r,b y,g	r,b y,g	r,b y,g	r,b y,g
r,b y,g	r,b y,g	r,b y,g	r,b y,g
r,b y,g	r,b y,g	r,b y,g	r,b y,g

X11=r

r	b y,g	b y,g	b y,g
b y,g	b y,g	r,b y,g	r,b y,g
b y,g	r,b y,g	b y,g	r,b y,g
b y,g	r,b y,g	r,b y,g	b y,g

X12=b

r	b	y,g	y,g
b y,g	y,g	r,b y,g	r,b y,g
b y,g	r y,g	b y,g	r,b y,g
b y,g	r y,g	r,b y,g	b y,g

X13=y

r	b	y	g
b y,g	y,g	r,b g	r,b y,g
b y,g	r y,g	b g	r,b y,g
b y,g	r y,g	r,b g	b y,g

X14=g

r	b	y	g
b y,g	y,g	r,b	r,b y
b y,g	r y	b g	r,b y
b y	r y,g	r,b g	b y

X22=y

r	b	y	g
b g	y	r,b	r,b
b y,g	r	b g	r,b y
b y	r g	r,b g	b

X32=r

r	b	y	g
b g	y	b	r,b
b y,g	r	b g	b y
b y	g	r,b g	b

X23=b

r	b	y	g
g	y	b	r
b y,g	r	g	b y
y	g	r g	b

X24=r

r	b	y	g
g	y	b	r
b y,g	r	g	b y
y	g	rg	b

X21=g

ESERCIZIO 2

r	b	y	g
g	y	b	r
b y	r	g	b y
y	g	r g	b

X33=g

r	b	y	g
g	y	b	r
b y	r	g	b y
y	g	r	b

X41=y

r	b	y	g
g	y	b	r
b	r	g	b y
y	g	r	b

X31=b

r	b	y	g
g	y	b	r
b	r	g	y
y	g	r	b

Più quattro stati identici all'ultimo relativi alle istanziazioni di X34 a y, X42 a g, X43 a r e X44 a b. SOLUZIONE CONSISTENTE

ESERCIZIO 3

- Si supponga di avere a disposizione i seguenti vincoli:

  $X < Y, X \neq K, Y + 5 \leq K, Y + 7 > Z, X \leq Z$

  definiti sulle variabili X, Y, Z, K il cui dominio di definizione è [1..20].

- Si risolva il problema applicando la strategia di <u>full look ahead</u>.

  IL MODELLO E' DATO

  $X < Y, X \neq K, Y + 5 \leq K, Y + 7 > Z, X \leq Z$

  X, Y, Z, K ::[1..20]

SOLUZIONE

- Istanzio X=1
- Propagazione full look ahead:
  - Y::[2..15], K::[7..20], Z::[1..20]

- Istanzio: Y=2
  - K::[7..20], Z::[1..8]

- Istanzio: K=7
  - Z::[1..8]
- Istanzio: Z = 1 <u>soluzione</u>

ESERCIZIO 4

- Si devono visitare 6 clienti A, B, C, D, E, F nell'arco della giornata lavorativa (dalle 9 alle 19).
  - Due clienti non possono essere visitati contemporaneamente.
  - Si sa che i clienti C ed F devono essere visitati prima del cliente D.
- • A è un cliente fuori città, mentre B, C, D, E ed F sono tutti in centro. Quindi, per spostarsi da A a ogni altro cliente si impiegano due ore, mentre qualunque spostamento in centro città viene effettuato a tempo trascurabile (=0).
  - Il cliente C può essere visitato solo dalle 15 alle 17.

- Si modelli il problema in termini di variabili e vincoli. Si mostri l'albero di ricerca <u>fino alla prima soluzione</u> relativo alla strategia standard backtracking e quello relativo al forward checking e si commentino i risultati.

SOLUZIONE

- Variabili: clienti
- Domini: possibili orari di visita A, B, C, D, E, F::[9..18]
- Vincoli:
  - Due clienti non possono essere visitati contemporaneamente:

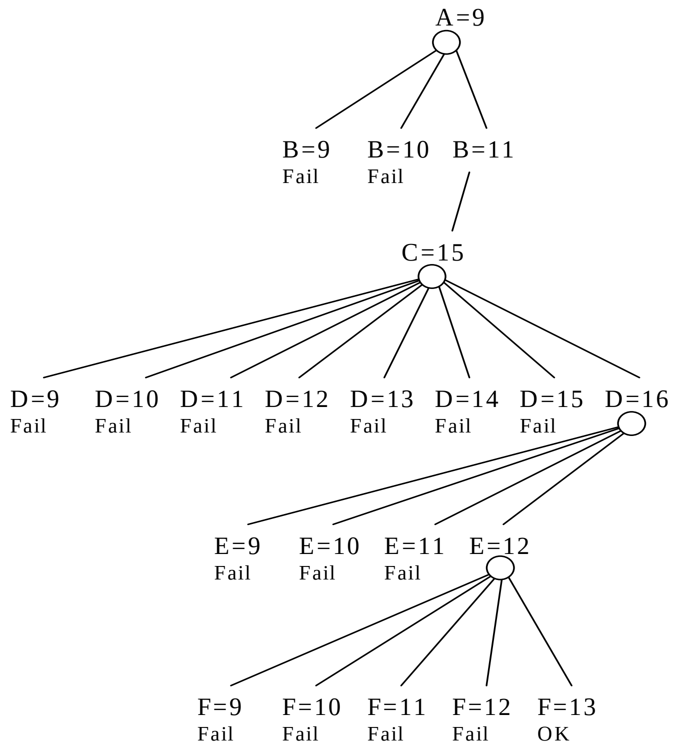
    per $\forall$ **X, Y** **X $\neq$ Y**
  - I clienti C ed F devono essere visitati prima del cliente D:

    C < D F < D
  - A è un cliente fuori città, mentre B, C, D, E e F sono tutti in centro. Quindi, per spostarsi da A ad ogni altro cliente si impiegano due ore, mentre qualunque spostamento in centro città viene effettuato a tempo trascurabile (=0).

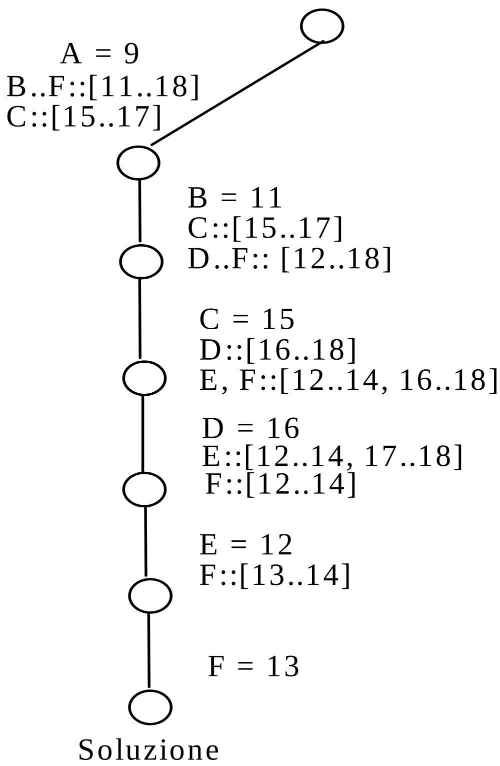
    $\forall$ **X $\in$ [B, C, D, E, F] A $\geq$ X + 2 OR X $\geq$ A + 2**
  - Il cliente C può essere visitato solo dalle 15 alle 17.
  - Vincolo unario su C che riduce il suo dominio

    C $\geq$ 15 e C $\leq$ 17

STANDARD BACKTRACKING



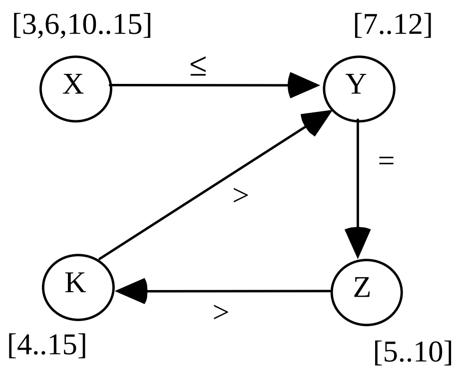
FORWARD CHECKING



SI NOTI che non ci sono rami di fallimento e conseguenti backtracking contro i 16 fallimenti dello std. back.

ESERCIZIO 5

Si consideri la seguente rete di vincoli



X::[3,6,10..15], Y::[7..12], K::[4..15],
Z::[5..10], Y =Z, Z < K, K >Y, X ≤ Y

E si applichi l’arc-consistenza. Si discuta inoltre cosa accade applicando l’arc-consistenza alla stessa rete se si introduce un vincolo ulteriore X = K.

SOLUZIONE

X::[3,6,10..15], Y::[7..12], K::[4..15],
Z::[5..10], Y =Z, Z < K, K >Y, X ≤ Y

Risultato dell’arc-consistency

```
X = [3, 6, 10]
Z = [7..10]
K = [8..15]
Y = [7..10]
```

Introducendo il nuovo vincolo si riporta fallimento. Si noti la computazione incrementale

ESERCIZIO 6

- Dati i seguenti vincoli:

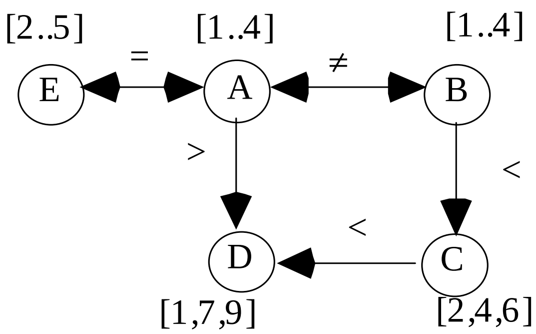
  `A::[1..4], B::[1..4], C::[2,4,6],`
  `D::[1,7,9],E::[2..5],`

  `A > D, A ≠ B, B < C, C > D, E = A`

- Si disegni il grafo corrispondente al problema di soddisfacimento di vincoli e si applichi l'arc-consistenza. Si disegni l'albero <u>per arrivare alla prima soluzione</u> usando come euristica di assegnamento di valori alle variabili il first-fail e <u>ad ogni istanziazione si riapplichi l'arc-consistenza alla rete residua</u>.

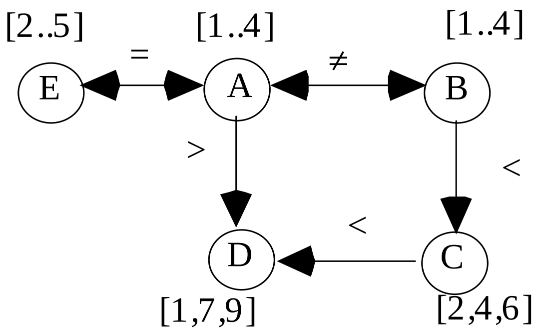
SOLUZIONE

Grafo corrispondente al problema



SOLUZIONE

Grafo corrispondente al problema



Dopo l'applicazione dell'arc-consistenza al problema originale si ottiene

A::[2..4]

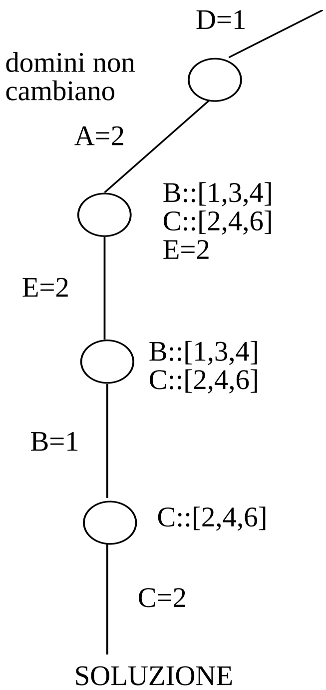
B::[1..4]

C::[2, 4, 6]

D = 1

E::[2..4]

RICERCA



SOLUZIONE

A = 2, B = 1, C = 2, D = 1, E = 2