LA LOGICA DEI PREDICATI DEL PRIMO ORDINE

- *Materiale dal libro: L. Console, E. Lamma, P. Mello, M.Milano: Programmazione Logica e Prolog, Seconda Edizione UTET editore.*

- La logica è quella scienza che fornisce all'uomo gli strumenti indispensabili per controllare con sicurezza la rigorosità dei ragionamenti.
- **La logica** fornisce gli strumenti formali per:
  - analizzare le inferenze in termini di operazioni su espressioni simboliche;
  - dedurre conseguenze da certe premesse;
  - studiare la verità o falsità di certe proposizioni data la verità o falsità di altre proposizioni;
  - stabilire la consistenza e la validità di una data teoria.

LOGICA E INFORMATICA

- La logica è utilizzata:
  - In Intelligenza Artificiale come linguaggio formale per la rappresentazione di conoscenza
  - semantica non ambigua
  - sistemi formali di inferenza
  - per sistemi di dimostrazione automatica di teoremi e studio di meccanismi efficienti per la dimostrazione
  - Per la progettazione di reti logiche;
  - Nei database relazionali, come potente linguaggio per l'interrogazione intelligente;
  - Come linguaggio di specifica di programmi che per eseguire prove formali di correttezza;
  - Come un vero e proprio linguaggio di programmazione (programmazione logica e PROLOG).

LOGICA CLASSICA

- Si suddivide in due classi principali:
  - logica proposizionale
  - logica dei predicati.
- Permettono di esprimere proposizioni (cioè frasi) e relazioni tra proposizioni.
- La principale differenza tra le due classi è in termini di espressività: nella logica dei predicati è possibile esprimere variabili e quantificazioni, mentre questo non è possibile nella logica proposizionale.
- Il linguaggio della logica dei predicati del primo ordine è definito da:
  - una sintassi: caratteristiche strutturali del linguaggio formale (mediante una grammatica) senza attribuire alcun significato ai simboli;
  - una semantica, che interpreta le frasi sintatticamente corrette del linguaggio. Si dà una interpretazione alle formule stabilendo se una frase è vera o falsa.

LOGICA DEI PREDICATI: SINTASSI

- Alfabeto, che consiste di cinque insiemi:
  - l'insieme dei simboli di costante, C;
  - l'insieme dei simboli di funzione, F;
  - l'insieme dei simboli di predicato (o relazione), P;
  - l'insieme dei simboli di variabile, V;
  - i connettivi logici:

    ~ (negazione),

    $\wedge$ (congiunzione),

    $\vee$ (disgiunzione),

    $\leftarrow$ (implicazione),

    $\leftrightarrow$ (equivalenza),

    le parentesi “(“ “)”

    e i quantificatori esistenziale ($\exists$) e universale ($\forall$).

LOGICA DEI PREDICATI: SINTASSI

- Costanti: singole entità del dominio del discorso.
  - Es. “maria”, “giovanna”, “3” ⇒ iniziale minuscola
- Variabili: entità non note del dominio,
  - Es. X, Y ⇒ iniziale maiuscola
- Funzioni n-arie: individua univocamente un oggetto del dominio del discorso mediante una relazione tra altri “n” oggetti del dominio.
  - Es. madre(maria)
- Importante: le funzioni, in logica, non presuppongono alcun concetto di valutazione
- Predicati n-ari: generica relazione (che può essere vera o falsa) fra “n” oggetti del dominio del discorso.
  - Es. parente(giovanna,maria)

LOGICA DEI PREDICATI: SINTASSI

- Date queste definizioni principali possiamo definire:
- Termine (definito ricorsivamente):
  - - una variabile è un termine;
  - - una costante è un termine;
  - - se f è un simbolo di funzione n-aria e t_1,...t_n sono termini, allora f(t_1,...,t_n) è un termine.
  - Es. maria, f(X)
- Atomo o formula atomica:
  - l’applicazione di un simbolo di predicato n-ario p a n termini t_1,...,t_n: p(t_1,..,t_n).
  - Es. parente(giovanna,maria)

LOGICA DEI PREDICATI: SINTASSI

- Espressione o formula: sequenza di simboli appartenenti all'alfabeto.
  - `parente(giovanna, maria)` (E1)
  - $\exists$`X (uomo(X)` $\wedge$ `felice(X))` (E2)
  - $\forall$`X (uomo(X)` $\rightarrow$ `mortale(X))` (E3)
  - $\exists$`X (uomo(X)` $\wedge$`)` (E4)
  - $\exists$`X (uomo(f(X)` (E5)
- Formule ben formate (fbf): frasi sintatticamente corrette del linguaggio. Si ottengono attraverso combinazione di formule atomiche, utilizzando i connettivi e i quantificatori. Sono definite ricorsivamente come segue:
  - ogni atomo è una fbf;

LOGICA DEI PREDICATI: SINTASSI

- Formule ben formate (fbf): frasi sintatticamente corrette del linguaggio. Si ottengono attraverso combinazione di formule atomiche, utilizzando i connettivi e i quantificatori. Sono definite ricorsivamente come segue:
  - ogni atomo è una fbf;
  - se A e B sono fbf, allora lo sono anche ~A, A$\wedge$B, A$\vee$B, A$\rightarrow$B, A$\leftrightarrow$B (eventualmente racchiuse tra parentesi tonde bilanciate);
  - se A è una fbf e X è una variabile, $\forall$X A e $\exists$X A sono fbf.
- Le espressioni (E1), (E2), (E3) sono formule ben formate, mentre non lo sono (E4) e (E5).
- Letterale: fbf atomica o la sua negazione. Ad esempio, la formula (E1) è un letterale.

REGOLE DI PRECEDENZA TRA OPERATORI

$\sim \exists \forall$

$\wedge$

$\vee$

$\rightarrow \leftrightarrow$

- Esempio

La fbf: $a \vee \sim b \wedge \exists X\ c(X) \rightarrow d(X,Y)$

è equivalente a: $(a \vee ((\sim b) \wedge (\exists X\ c(X)))) \rightarrow d(X,Y)$

- fbf in forma normale prenessa disgiuntiva ("disjunctive prenex normal form"): disgiunzione di una o più fbf composte da congiunzioni di letterali; le quantificazioni compaiono tutte in testa a F.
- fbf in forma normale prenessa congiuntiva ("conjunctive prenex normal form"): congiunzione di una o più fbf composte da disgiunzioni di letterali; le quantificazioni compaiono tutte in testa ad F.

REGOLE DI PRECEDENZA TRA OPERATORI

- Esempio

La fbf: $\exists X \forall Y \exists Z\ (a(X) \wedge b(Y,Z)) \vee (c(X) \wedge \sim a(Z) \wedge d) \vee f$

è in forma normale disgiuntiva.

La fbf: $\exists X\ \forall Y\ \exists Z\ (a(X) \vee b(Y,Z)) \wedge (c(X) \vee \sim a(Z) \vee d) \wedge f$

è in forma normale congiuntiva.

- Qualunque fbf può essere trasformata in forma normale prenessa (congiuntiva o disgiuntiva) attraverso opportune trasformazioni sintattiche.
- Campo di azione (scope) di un quantificatore: fbf che lo segue immediatamente. Nel caso di ambiguità si utilizzano le parentesi tonde.
- Esempio
  - Nella fbf: $\forall X\ (p(X,Y) \wedge q(X)) \vee q(X)$
  - la quantificazione sulla variabile X ha come campo d'azione la formula $p(X,Y) \wedge q(X)$

REGOLE DI PRECEDENZA TRA OPERATORI

- Variabili libere: variabili che non compaiono all'interno del campo di azione di un quantificatore.
- Esempio nella fbf: $F = \forall X\ (p(X,Y) \wedge q(X))$ la variabile Y risulta libera in F.
- Formule chiuse: fbf che non contengono alcuna variabile libera. Ad esempio, le formule (E1), (E2) ed (E3) sono fbf chiuse. Nel seguito considereremo solo formule fbf chiuse.
- Formule ground: formule che non contengono variabili. Ad esempio la formula (E1) è una formula "ground".
- Varianti:una formula F2, ottenuta rinominando le variabili di una formula F1, è detta variante di F1.
- Esempio La formula: $\forall X\ \exists Y\ p(X,Y)$ è una variante della formula $\forall W\ \exists Z\ p(W,Z)$.

SEMANTICA

- Occorre associare un significato ai simboli.
- Ogni sistema formale è la modellizzazione di una certa realtà (ad esempio la realtà matematica).
- Un'interpretazione è la costruzione di un rapporto fra i simboli del sistema formale e tale realtà (chiamata anche dominio del discorso).
- Ogni formula atomica o composta della logica dei predicati del primo ordine può assumere il valore vero o falso in base alla frase che rappresenta nel dominio del discorso.
- **Esempio:**
  - $\forall X\ \forall Y\ \forall Z\ \ (op(X,\ Y,\ Z\ ) \rightarrow op(Y,\ X,\ Z\ ))$
  - se X, Y, Z variano sull'insieme dei numeri reali tale formula è vera se il simbolo di predicato "op" ha il significato di un operatore commutativo (es: somma o moltiplicazione), falsa se l'operatore non è commutativo (es. sottrazione o divisione).

INTERPRETAZIONE

- Dato un linguaggio del primo ordine L un'interpretazione per L definisce un dominio non vuoto D e assegna:
  - a ogni simbolo di costante in C, una costante in D;
  - a ogni simbolo di funzione n-ario F, una funzione:
  - F: $D^n \rightarrow D$;
  - a ogni simbolo di predicato n-ario in P una relazione in D^n, cioè un sottoinsieme di D^n.

- Esempio: Linguaggio del primo ordine, L, nel quale si ha una costante "0", un simbolo di funzione unaria "s" e un simbolo di predicato binario "p".

INTERPRETAZIONE

- **Interpretazione I1** D: numeri naturali.
  - "0" rappresenta il numero zero.
  - "s" rappresenta il successore di un numero naturale
  - "p" rappresenta la relazione binaria "≤"

- **Interpretazione I2** D: numeri interi negativi.
  - "0" rappresenta il numero zero.
  - "s" rappresenta il predecessore di un numero naturale
  - "p" rappresenta la relazione binaria "≤"

VALORE DI VERITÀ DI UNA fbf

- Data un’interpretazione il valore di verità di una fbf si definisce secondo le seguenti regole.
- Formula atomica “ground” ha valore vero sotto un'interpretazione quando il corrispondente predicato è soddisfatto (cioè quando la corrispondente relazione è vera nel dominio). La formula atomica ha valore falso quando il corrispondente predicato non è soddisfatto.
- Interpretazione I1.

  p(0,s(0)) vero

  p(s(0), 0) falso
- Interpretazione I2.

  p(0,s(0)) falso

  p(s(0), 0) vero

VALORE DI VERITÀ DI UNA fbf (2)

- Formula composta il valore di verità di una formula composta rispetto a un’interpretazione si ottiene da quello delle sue componenti utilizzando le tavole di verità dei connettivi logici.

A	B	~A	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

Nota: ***l’implicazione $A \Rightarrow B$ è diversa rispetto al "se ..... allora" utilizzato nel linguaggio naturale.***

A: antecedente B: conseguente

VALORE DI VERITÀ DI UNA fbf (3)

- Data la formula F:

  volano(asini) $\Rightarrow$ ha_scritto(manzoni,promessi_sposi)

  assumendo l'interpretazione più intuitiva, F ha valore vero, poiché l'antecedente ha valore falso in tale interpretazione.

- La formula F:

  $p(s(0),0) \Rightarrow p(0,s(0))$

  ha valore vero nell'interpretazione I1 poiché l'antecedente ha valore falso, mentre ha valore falso in I2 poiché a un antecedente vero corrisponde un conseguente falso.

- <u>Formula quantificata esistenzialmente</u>: una formula del tipo $\exists$X F è vera in un'interpretazione I se esiste almeno un elemento d del dominio D tale che la formula F', ottenuta assegnando d alla variabile X, è vera in I. In caso contrario F ha valore falso.

VALORE DI VERITÀ DI UNA fbf (2)

- Esempio

  La formula $\exists$X p(X,s(0)) ha valore vero nell'interpretazione I1 in quanto esiste un numero naturale, zero, minore di uno, tale che la formula F'=p(0,s(0)) ha valore vero in I1.

- 4) <u>Formula quantificata universalmente</u>: una formula del tipo $\forall$X F è vera in un'interpretazione I se per ogni elemento d del dominio D, la formula F', ottenuta da F sostituendo d alla variabile X, è vera in I. Altrimenti F ha valore falso.

- Esempio

  La fbf $\forall$Y p(0,Y) ha valore vero rispetto alle interpretazioni I1 (dove viene interpretata come "0 è minore o uguale a ogni intero positivo Y"), mentre ha valore falso rispetto a I2 poiché esiste almeno un elemento del dominio che la falsifica (esempio non è vero che "0 è minore o uguale a –1").

MODELLI

- Data una interpretazione I e una fbf chiusa F, I è un modello per F se e solo se F è vera in I.
  - Esempio: Per la fbf $\forall Y\ p(0,Y)$ l'interpretazione I1 è un modello, mentre I2 non lo è.
- Una fbf è soddisfacibile se e solo se è vera almeno in una interpretazione, ovvero se esiste almeno un modello per essa.
- Una fbf che ha valore vero per tutte le possibili interpretazioni, cioè per cui ogni possibile interpretazione è un modello, è detta logicamente valida.
  - Esempio: La fbf $\forall X\ p(X) \vee \sim(\forall Y\ p(Y))$ è logicamente valida. Infatti, le formule $\forall X\ p(X)$ e $\forall Y\ p(Y)$ sono semplici varianti della stessa formula F e quindi hanno i medesimi valori di verità per qualunque interpretazione. In generale, $F \vee \sim F$ ha sempre valore vero, in modo indipendente dall'interpretazione.
- F logicamente valida $\Leftrightarrow$ ~F è non soddisfacibile.
- F è soddisfacibile $\Leftrightarrow$ ~F non è logicamente valida.

INSIEMI DI FORMULE (1)

- Un insieme di formule chiuse del primo ordine S è soddisfacibile se esiste una interpretazione I che soddisfa tutte le formule di S (cioè che è un modello per ciascuna formula di S). Tale interpretazione è detta modello di S.

Esempio

- Si consideri il seguente insieme di formule S:
- $S=\{\forall Y\ p(Y,Y),\ p(s(0),0) \Rightarrow p(0,s(0))\}$.
- L'interpretazione I1 è modello di S, mentre I2 non lo è. In I2 è infatti soddisfatta la prima formula dell'insieme, ma non la seconda.
- Un insieme di formule S che non può essere soddisfatto da alcuna interpretazione, è detto insoddisfacibile (o inconsistente). Ad esempio l'insieme di formule {A,~A} è insoddisfacibile.

INSIEMI DI FORMULE (2)

- Un insieme di formule chiuse del primo ordine S è **soddisfacibile** se esiste una interpretazione I che soddisfa <u>tutte le formule</u> di S (cioè che è un modello per ciascuna formula di S). Tale interpretazione è detta modello di S.

- Esempi di insiemi di formule insoddisfacibili sono:
  - S1={~ (∃X ∀Y p(X,Y)), ∃X ∀Y p(X,Y)}
  - S2={p(s(0),0)⇒p(0,s(0)), p(s(0),0), ~p(0,s(0))}
  - In S1, infatti, compaiono una formula e la sua negazione. In S2, per ogni interpretazione in cui p(s(0),0) e ~p(0,s(0)) sono vere, la formula p(s(0),0) ⇒ p(0,s(0)) non è vera, per la tabella di verità della negazione e dell'implicazione.

CONSEGUENZA LOGICA (1)

- Una formula F <u>segue logicamente</u> (o è conseguenza logica) da un insieme di formule S (e si scrive S |= F), se e solo se ogni interpretazione I che è un modello per S, è un modello per F.

Esempio

- Si consideri l'insieme di fbf S:
- {p(0,0), ∀X p(X,X), ∀X ∀Y (p(X,Y) ⇒p(X,s(Y)))}
- Da S segue logicamente la formula F=p(0,s(0)) poiché ogni interpretazione I che soddisfa S soddisfa anche F.
- Dall'insieme S, invece, non segue logicamente la formula F1: p(s(0),0) in quanto esiste un'interpretazione (I1) che soddisfa S, ma non F1.

CONSEGUENZA LOGICA (2)

- Una formula F <u>segue logicamente</u> (o è conseguenza logica) da un insieme di formule S (e si scrive S |= F), se e solo se ogni interpretazione I che è un modello per S, è un modello per F.

<u>Proprietà</u>

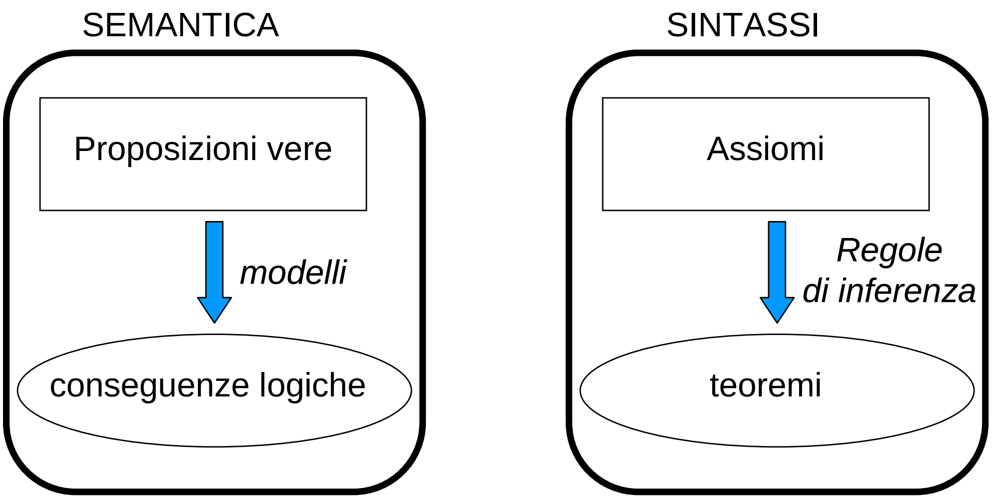
- Se una fbf F segue logicamente da S (S |= F), allora l'insieme S ∪ {~F} è insoddisfacibile.
- Viceversa, se S ∪ {~F} è insoddisfacibile (e S era soddisfacibile), allora F segue logicamente da S.
- Difficile lavorare a livello semantico (interpretazione, modelli). Quindi si lavora a livello sintattico.

SISTEMI DI REFUTAZIONE

- I sistemi di refutazione si basano su questa proprietà: per dimostrare S |= F supposto S soddisfacibile è sufficiente dimostrare che S∪{~F} è insoddisfacibile.
- Problema interessante:

  Determinare se una formula F segue logicamente da S (ovvero che S ∪ {~F} è insoddisfacibile) utilizzando solo <u>semplici trasformazioni sintattiche</u> (regole di inferenza), possibilmente ripetitive e quindi automatizzabili, e non introducendo concetti quali significato o interpretazione o modello.

SISTEMI DI REFUTAZIONE



TEORIE DEL PRIMO ORDINE (1)

- Calcolo proposizionale: verifica di formula/e vera/e tramite le tavole di verità
- Calcolo dei predicati del primo ordine: tavole di verità troppo complesse. Dominio di interpretazione estremamente grande, se non infinito. Si ricorre al metodo assiomatico (noto come proof theory).
- A questo scopo, la logica dei predicati del primo ordine può essere formulata come sistema assiomatico-deduttivo.

Teoria assiomatica

- formule ben formate ritenute vere: assiomi
- criteri di manipolazione sintattica: regole di inferenza derivano fbf da fbf
- condizioni
- conclusione

TEORIE DEL PRIMO ORDINE (1)

- Scopo: produrre nuove formule sintatticamente corrette (teoremi).
- Semplificazioni:
- Consideriamo solo i connettivi logici ~ (negazione) e $\rightarrow$ (implicazione). Gli derivano da questi. VERIFICA

$(A \wedge B)$	equivale a	$(\sim(A \rightarrow (\sim B)))$
$(A \vee B)$	equivale a	$((\sim A) \rightarrow B)$
$(A \times B)$	equivale a	$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$

- Inoltre, per i quantificatori:

$\exists X\ A$	abbrevia	$\sim(\forall X \sim A)$
$\forall X\ A$	abbrevia	$\sim(\exists X \sim A)$

REGOLE DI INFERENZA DEL CALCOLO DEI PREDICATI

- **Modus Ponens (MP):**

$$\frac{A,\ A \rightarrow B}{B}$$

che deriva da due formule del tipo A e $A \rightarrow B$ la nuova formula B.

- **Specializzazione (Spec)**:

$$\frac{\forall X\ \ A}{A(t)}$$

- Da una formula quantificata universalmente è possibile derivare una formula identica all'originale in cui la variabile X è sostituita da un elemento del dominio del discorso (costante e funzione).

DIMOSTRAZIONE DI TEOREMI (1)

- Dimostrazione: sequenza finita di fbf f_1, f_2, ..., f_n, tale che ciascuna f_i o è un assioma oppure è ricavabile dalle fbf precedenti mediante una regola di inferenza.
- Teorema: L'ultima fbf di ogni dimostrazione.
- Prova del teorema: sequenza di regole di inferenza applicate.
- Una fbf F è derivabile in una teoria T (T |- F) se esiste una sequenza di fbf f_1, f_2, ..., f_n, tale che f_n = F e, per ogni i, o f_i è un assioma di T, oppure è ricavabile dalle fbf precedenti mediante una regola di inferenza di T.

DIMOSTRAZIONE DI TEOREMI (2)

Esempio

- Teoria T: assiomi propri (relazione di minore uguale sui numeri naturali):

  p(0,0) (A1)

  $\forall X\ \forall Y\ (p(X,Y) \Rightarrow p(X,s(Y)))$ (A2)

  $\forall X\ p(X,X)$ (A3)
- Teorema p(0,s(0)) (cioè T |- p(0,s(0)))
- Trasformazione da Spec e A2:

  $\forall X\ \forall Y\ (p(X,Y) \Rightarrow p(X,s(Y))) \Rightarrow \forall Y\ (p(0,Y) \Rightarrow p(0,s(Y)))$ (T1)

  applicando MP a T1 e A2: $\forall Y\ (p(0,Y) \Rightarrow p(0,s(Y)))$ (T2)

  da Spec. e T2:

  $\forall Y (p(0,Y) \Rightarrow p(0,s(Y))) \Rightarrow p(0,0) \Rightarrow p(0,s(0)))$ (T3)

  applicando MP a T3 e T2: $p(0,0) \Rightarrow p(0,s(0))$ (T4)

  applicando MP a T4 e A1: p(0,s(0)) (T5)

DECIDIBILITÀ

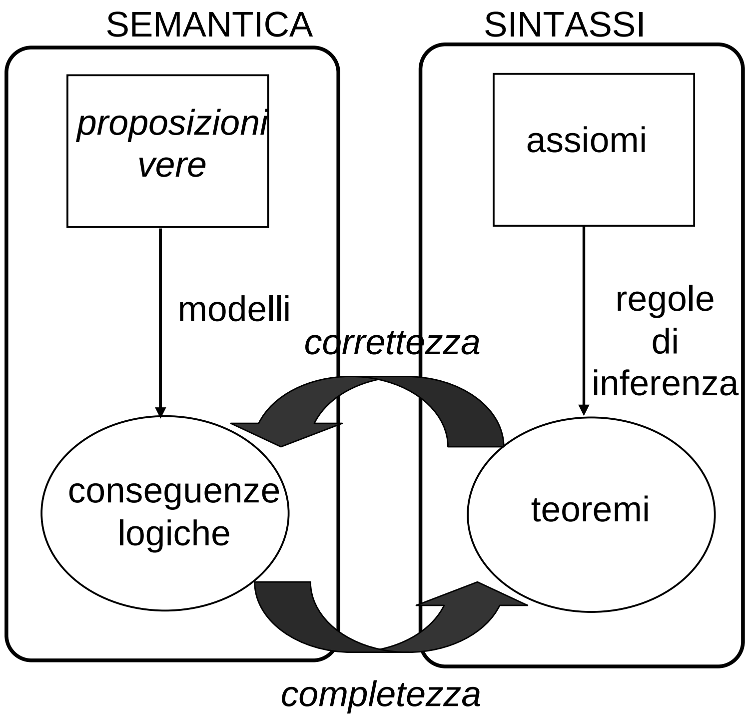
- Teoria decidibile teoria per la quale esiste un metodo meccanico per stabilire se una qualunque fbf è un teorema o non lo è.
- Il calcolo dei predicati del primo ordine non è decidibile, ma semi-decidibile: se una formula è un teorema, esiste un metodo meccanico che la deriva in un numero finito di passi. Se invece la formula non è un teorema, non è garantita, in generale, la terminazione del metodo meccanico.
- Una teoria del primo ordine è un insieme di fbf chiuse (assiomi) e si può quindi parlare di modello di una teoria.
- Un modello per una teoria del primo ordine T è un'interpretazione che soddisfa tutti gli assiomi di T (assiomi logici e assiomi propri).
- Se T ha almeno un modello viene detta consistente (o soddisfacibile).

CORRETTEZZA E COMPLETEZZA (1)

- Una teoria assiomatica è **corretta** se i teoremi dimostrati seguono logicamente dagli assiomi della teoria.
- Una teoria assiomatica è **completa** se tutte le fbf che seguono logicamente dalla teoria possono essere dimostrati come teoremi della teoria.
- Se T è corretta e completa è garantita l'equivalenza tra l'aspetto sintattico e semantico

$$T \vdash F \quad \Leftrightarrow \quad T \models F.$$

CORRETTEZZA E COMPLETEZZA (2)



ESEMPIO

- Si consideri una teoria del primo ordine T, data dai seguenti assiomi propri che rappresentano la relazione di minore sui numeri naturali:

$p(0,s(0))$	(A1)
$\forall X \forall Y\ (p(X,Y) \rightarrow p(X,s(Y)))$	(A2)
$\forall X\ p(X,s(X))$	(A3)

- Le regole di inferenza di T siano Modus Ponens, Specializzazione e la seguente regola:
- **Abduzione (ABD):**

$$\frac{B\,,A \rightarrow B}{A}$$

ESEMPIO

- In T si deriva come teorema la formula p(0,0) applicando le seguenti trasformazioni:
  - da Spec. e A2:
  - $\forall X \forall Y (p(X,Y) \rightarrow p(X,s(Y))) \rightarrow \forall Y\ (p(0,Y) \rightarrow p(0,s(Y)))$ (T1)
- applicando MP a T1 e A2:
  - $\forall Y\ (p(0,Y) \rightarrow p(0,s(Y)))$ (T2)
- da Spec. e T2:
  - $\forall Y\ (p(0,Y) \rightarrow p(0,s(Y))) \rightarrow (p(0,0) \rightarrow p(0,s(0)))$ (T3)
- applicando MP a T3 e T2:
  - $p(0,0) \rightarrow p(0,s(0))$ (T4)
- applicando ABD a T4 e A6:
  - p(0,0) (T5)

ESEMPIO

- A causa dell'applicazione dell'abduzione, questa teoria **non è corretta**: un'interpretazione che ha come dominio l'insieme dei numeri naturali e associa al simbolo di funzione "s" la funzione successore e al simbolo di predicato "p" la relazione < (minore) è un modello per gli assiomi, ma non per la formula p(0,0).
- **Esempio**
  - sta-male(mario).
  - $\forall$ X (ha-epatite(X) $\rightarrow$ sta-male(X)).
- **si conclude**:
  - ha-epatite(mario).

  ERRORE !!

ABDUZIONE: ESEMPI

$\forall$ X (person(X) $\rightarrow$ mortal(X)).

- mortal(tweety).
- Allora deriviamo: person(tweety).
- Vincoli:
  - $\forall$ X not(person(X) and bird(X)).
  - Se aggiungiamo: bird(tweety)
  - violiamo i vincoli.
- Esempio

Ragionamento abduttivo usato per diagnosi di guasti

ABDUZIONE: ESEMPI

- Teoria:
  - ruota_traballante:- raggi_rotti.
  - ruota_traballante:- gomma_sgonfia.
  - gomma_sgonfia:- valvola_difettosa.
  - gomma_sgonfia:- forata_camera_aria.
  - gomma_mantiene_aria.
- Vincoli:
  - :- gomma_sgonfia, gomma_mantiene_aria
- Goal
  - ?- ruota_traballante.
- Risposta: yes if raggi_rotti
- Mentre:
  - yes if valvola_difettosa
  - yes if forata_camera_aria
  - non sono accettabili in quanto violano i vincoli.

MONOTONICITÀ

- Un'altra proprietà fondamentale delle teorie del primo ordine è la monotonicità. Una teoria T è monotona se l'aggiunta di nuovi assiomi non invalida i teoremi trovati precedentemente.

Proprietà

- Sia Th(T) l'insieme dei teoremi derivabili da T. Allora T è monotona se Th(T) $\subseteq$ Th(T$\cup$H) per qualunque insieme aggiuntivo di assiomi H.
- Esistono regole di inferenza non monotone. Ad esempio la regola nota come Assunzione di Mondo Chiuso ("Closed World Assumption"):

Assunzione di Mondo Chiuso (CWA):

$$\frac{T \mid\neq A}{\sim A}$$

- se una formula atomica "ground" A non è conseguenza logica di una teoria T, ~A si può considerare un teorema di T. Se alla teoria T si aggiunge l'assioma A, non si può più derivare ~A, da cui segue la non monotonicità del sistema di inferenza.

IL PRINCIPIO DI RISOLUZIONE

- Sistema di deduzione per la logica a clausole per il quale valgono interessanti proprietà.
- Regola di inferenza**: Principio di Risoluzione** [Robinson 65], che si applica a teorie del primo ordine in **forma a clausole**.
- È la regola di inferenza base utilizzata nella programmazione logica.

CLAUSOLE

- Una **clausola** è una disgiunzione di letterali (cioè formule atomiche negate e non negate), in cui tutte le variabili sono quantificate universalmente in modo implicito.
- Una clausola generica può essere rappresentata come la disgiunzione:

  $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n \vee \sim B_1 \vee \ldots \vee \sim B_m$

  dove A_i (i=1,..,n) e B_j (j=1,..,m) sono atomi.
- Una clausola nella quale non compare alcun letterale, sia positivo sia negativo, è detta clausola vuota e verrà indicata con □. interpretato come contraddizione: disgiunzione falso $\vee$ ~vero
- Un sottoinsieme delle clausole è costituito dalle **clausole definite**, nelle quali si ha sempre un solo letterale positivo:

  $A_1 \vee \sim B_1 \vee \ldots \vee \sim B_m$

TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (1)

- Passi per trasformare una qualunque fbf della logica dei predicati del primo ordine in un insieme di clausole
- 1) **Trasformazione in fbf chiusa**

  Esempio la formula:
  - $\forall X\ (p(Y) \rightarrow \sim(\forall Y\ (q(X,Y) \rightarrow p(Y))))$ (1)

  è trasformata in:
  - $\forall X\ \forall Y\ (p(Y) \rightarrow \sim(\forall Y\ (q(X,Y) \rightarrow p(Y))))$ (2)
- 2) **Applicazione delle equivalenze per i connettivi logici** (ad esempio $A \rightarrow B$ è sostituito da $\sim A \vee B$) e la si riduce in forma and-or.

  La formula (2) diventa:
  - $\forall X\ \forall Y\ (\sim p(Y) \vee \sim(\forall Y\ (\sim q(X,Y) \vee p(Y))))$ (3)

TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (2)

- 3) **Applicazione della negazione ad atomi e non a formule composte**, tenendo presente che:

  $\forall X \sim A$ equivale a $\sim\exists X\ A$

  $\exists X \sim A$ equivale a $\sim \forall X\ A$

  $\sim(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n)$ equivale a $\sim A_1 \wedge \sim A_2 \wedge \ldots \wedge \sim A_n$

  $\sim(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n)$ equivale a $\sim A_1 \vee \sim A_2 \vee \ldots \vee \sim A_n$

  (leggi di De Morgan).

  (3) si modifica in:

  $\forall X\ \forall Y\ (\sim p(Y) \vee (\exists Y\ (q(X,Y) \wedge \sim p(Y))))$ (4)

- 4) **Cambiamento di nomi delle variabili**, nel caso di conflitti.

  in (4) la seconda variabile Y viene rinominata Z:

  $\forall X\ \forall Y\ (\sim p(Y) \vee (\exists Z\ (q(X,Z) \wedge \sim p(Z))))$ (5)

TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (3)

- 5) **Spostamento dei quantificatori** in testa alla formula (forma prenessa).

  $\forall X\ \forall Y\ \exists Z\ (\sim p(Y) \vee (q(X,Z) \wedge \sim p(Z)))$ (6)

- 6) **Forma normale congiuntiva** cioè come congiunzione di disgiunzioni, con quantificazione in testa.

  $\forall X\ \forall Y\ \exists Z\ ((\sim p(Y) \vee q(X,Z)) \wedge (\sim p(Y) \vee \sim p(Z)))$ (7)

- 7) **Skolemizzazione:** ogni variabile quantificata esistenzialmente viene sostituita da una funzione delle variabili quantificate universalmente che la precedono. Tale funzione è detta funzione di Skolem.

  Ad esempio una formula del tipo: $\forall X\ \exists Y\ p(X,Y)$ può essere espressa in modo equivalente come: $\forall X\ p(X,g(X))$

  In (7) Z è sostituita da f(X,Y), perché Z si trova nel campo di azione delle quantificazioni $\forall X$ e $\forall Y$:

  $\forall X \forall Y\ ((\sim p(Y) \vee q(X,f(X,Y))) \wedge (\sim p(Y) \vee \sim p(f(X,Y))))$ (8)

TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (4)

- **Perdita in espressività**. Non è la stessa cosa asserire: F: $\exists X\ p(X)$ oppure F': $p(f)$.
- Vale comunque la proprietà che F è inconsistente se e solo se F' è inconsistente.
- 8) **Eliminazione dei quantificatori universali**: si ottiene è una formula detta universale (tutte le sue variabili sono quantificate universalmente) in forma normale congiuntiva.
- $((\sim p(Y) \vee q(X,f(X,Y))) \wedge (\sim p(Y) \vee \sim p(f(X,Y))))$ (9)
- Una formula di questo tipo rappresenta **un insieme di clausole** (ciascuna data da un congiunto nella formula). La forma normale a clausole che si ottiene: $\{\sim p(Y) \vee q(X,f(X,Y)), \sim p(Y) \vee \sim p(f(X,Y))\}$ (10)
- La seconda clausola può essere riscritta rinominando le variabili (sostituendo cioè la formula con una sua variante).
- $\{\sim p(Y) \vee q(X,f(X,Y)), \sim p(Z) \vee \sim p(f(W,Z))\}$ (11)

TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (5)

- Qualunque teoria del primo ordine T può essere trasformata in una teoria T' in forma a clausole.
- Anche se T non è logicamente equivalente a T' (a causa dell'introduzione delle funzioni di Skolem), vale comunque la seguente proprietà:

Proprietà

- Sia T una teoria del primo ordine e T' una sua trasformazione in clausole. Allora T è insoddisfacibile se e solo se T' è insoddisfacibile.
- Il principio di risoluzione è una procedura di dimostrazione che opera per contraddizione e si basa sul concetto di insoddisfacibilità.

IL PRINCIPIO DI RISOLUZIONE

- Il principio di risoluzione, che si applica a formule in forma a clausole, è molto più efficiente del metodo assiomatico-deduttivo ed è utilizzato dalla maggior parte dei risolutori automatici di teoremi.
- **Logica Proposizionale:** clausole prive di variabili.
- Siano C_1 e C_2 due clausole prive di variabili:

  $C_1 = A_1 \vee \ldots \vee A_n$ $\qquad$ $C_2 = B_1 \vee \ldots \vee B_m$

- Se esistono in C_1 e C_2 due letterali **opposti**, A_i e B_j, ossia tali che $A_i = \sim B_j$, allora da C_1 e C_2, (clausole **parent**) si può derivare una nuova clausola C_3, denominata **risolvente**, della forma:

  $C_3 = A_1 \vee .. \vee A_{i-1} \vee A_{i+1} \vee .. \vee A_n \vee B_1 \vee .. \vee B_{j-1} \vee B_{j+1} \vee \ldots \vee B_m$

- **C_3 è conseguenza logica di $C_1 \cup C_2$.**

C1: $L \vee C1'$ $\qquad$ C2: $\neg L \vee C2'$

C: $C1' \vee C2'$

ESEMPI

$C_1 = p(0,0)$ $\qquad$ $C_2 = \sim p(0,0) \vee p(0,s(0))$

$C_3 = p(0,s(0))$

$C_1 = p \vee q \vee \sim a \vee \sim b$ $\qquad$ $C_2 = f \vee a$

$C_3 = p \vee q \vee \sim b \vee f$

UNIFICAZIONE

- Per applicare il principio di risoluzione alle clausole non “ground” è necessario introdurre il concetto di unificazione [Robinson 65].
- **Unificazione**: procedimento di manipolazione formale utilizzato per stabilire quando due espressioni possono coincidere procedendo a opportune sostituzioni.
- **Sostituzione**: σ insieme di legami di termini T_i a simboli di variabili X_i (i=1,..,n).

  $\sigma = \{X_1/T_1, X_2/T_2,...,X_n/T_n\}$

  dove $X_1, X_2,..., X_n$ sono distinte.
- La sostituzione corrispondente all'insieme vuoto è detta **sostituzione identità** (ε).

SOSTITUZIONI E RENAMING

- **Applicazione della sostituzione σ a un’espressione E**, *[E]σ, produce una nuova espressione ottenuta sostituendo simultaneamente ciascuna variabile X_i dell'espressione con il corrispondente termine T_i. [E]σ è detta* **istanza** *di E.*
- **Renaming**: *sostituzioni che cambiano semplicemente il nome ad alcune delle variabili di E. , [E]σ è una* **variante** *di E.*

SOSTITUZIONI ESEMPIO

- L'applicazione della sostituzione σ = {X/c, Y/a, Z/W} all'espressione p(X,f(Y),b,Z) produce l'istanza p(c,f(a),b,W).

Analogamente:

[c(Y,Z)]{Y/T, Z/neri} = c(T,neri)

[c(T,neri)]{Y/T, Z/neri} = c(T,neri)

[c(Y,Z)]{Y/bianchi,T/bianchi,Z/neri}=

c(bianchi,neri)

[c(T,neri)]{Y/bianchi,T/bianchi,Z/neri}=

c(bianchi,neri)

[c(Y,Z)]{Y/T, Z/bianchi} = c(T,bianchi)

[c(T,neri)]{Y/T, Z/bianchi} = c(T,neri)

[t(l(a),t(l(b),l(H)))]{H/l(a), Y/l(b), Z/l(l(a))}=

t(l(a),t(l(b),l(l(a))))

[t(H,t(Y,Z))]{H/T,Y/X,Z/W}=t(T,t(X,W))

(e8) è una variante dell'espressione di partenza.

[c(T,neri)]ε = c(T,neri)

[p(X,Y)]{X/a,Y/X} = p(a,X)

COMBINAZIONE DI SOSTITUZIONI

- **Combinazioni di sostituzioni**:

  $\sigma_1=\{X_1/T_1,X_2/T_2,...,X_n/T_n\}\sigma_2=\{Y_1/Q_1,Y_2/Q_2,...,Y_m/Q_m\}$

- **composizione** $\sigma_1\sigma_2$ di σ_1 e σ_2 è la sostituzione

  $\{X_1/[T_1]\sigma_2,...,X_n/[T_n]\sigma_2,Y_1/Q_1,Y_2/Q_2,..,Y_m/Q_m\}$

  cancellando le coppie $X_i/[T_i]\sigma_2$ per le quali si ha $X_i=[T_i]\sigma_2$ e le coppie Y_j/Q_j per le quali Y_j appartiene all'insieme $\{X_1, X_2,...,X_n\}$.

Esempio : σ_1 = {X/f(Z), W/R, S/c} σ_2 = {Y/X, R/W,Z/b}

produce: $\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2$ = {X/f(b), S/c, Y/X, R/W, Z/b}.

SOSTITUZIONI PIU' GENERALI

- **Sostituzioni più generali:** Una sostituzione θ è più generale di una sostituzione σ se esiste una sostituzione λ tale che $\sigma=\theta\lambda$.

Esempio : La sostituzione $\theta = \{Y/T, Z/neri\}$ è più generale della sostituzione $\sigma = \{Y/bianchi, T/bianchi, Z/neri\}$ in quanto σ si può ottenere attraverso la composizione $\{Y/T, Z/neri\}\{T/bianchi\}$ ($\sigma=\theta\lambda$, e $\lambda = \{T/bianchi\}$).

SOSTITUZIONE UNIFICATRICE

- L'**unificazione** rende identici due o più atomi (o termini) (o meglio le loro **istanze**) attraverso un'opportuna sostituzione.
- Se si considerano solo due atomi (o termini), uno dei quali senza alcuna variabile, si ricade in un caso particolare di unificazione, detto **pattern-matching**.
- Un insieme di atomi (o termini) A_1, A_2,..., A_n è **unificabile** se esiste una sostituzione σ tale che:

  $[A_1]\sigma = [A_2]\sigma = ... = [A_n]\sigma$.

- La sostituzione σ è detta **sostituzione unificatrice** (o unificatore)

ESEMPIO

Esempio Se si considerano gli atomi:

A1=c(Y,Z) A2=c(T,neri)

- possibili sostituzioni unificatrici sono:

  θ = {Y/T, Z/neri}

  σ = {Y/bianchi, T/bianchi, Z/neri}

- la loro applicazione produce la stessa istanza:

  [c(Y,Z)]θ = [c(T,neri)]θ = c(T,neri)

  [c(Y,Z)]σ = [c(T,neri)]σ = c(bianchi,neri)

- La sostituzione:

  λ={Y/T, Z/bianchi} non è un unificatore per A1 e A2 perchè produce istanze diverse.

ESEMPIO

- **Per gli atomi:**

  A3: p(X,X,f(a,Z)) A4: p(Y,W,f(Y,J))

- possibili sostituzioni unificatrici sono:

  μ = {X/a, Y/a, W/a, J/Z}

  φ = {X/a,Y/a,W/a, J/c, Z/c}

- la loro applicazione ad A3 e A4 produce la stessa istanza:

  p(a,a,f(a,Z)) nel caso della sostituzione μ

  p(a,a,f(a,c)) nel caso della sostituzione φ.

- Possono esistere più sostituzioni unificatrici, si vuole individuare quella più generale (mgu, **most general unifier**).

  μ mgu: φ si ottiene da μ componendola con: α = {Z/c}.

ESEMPI

θ indica la sostituzione unificatrice più generale:

1) p(X,f(a)) p(b, Y)

θ = {X/b, Y/f(a)}

2) t(l(a),t(l(b),l(c))) t(l(X),Z)

θ = {X/a, Z/t(l(b),l(c))}

I termini t(l(a),t(l(b),l(c))) e t(l(X),Z) rappresentano alberi binari.

3) t(l(a),t(l(b),l(H))) t(H,t(Y,Z))

θ = {H/l(a), Y/l(b), Z/l(l(a))}

4) f(X,g(Y),T) f(c(a,b),g(g(a,c)),Z).

θ = {X/c(a,b), Y/g(a,c), T/Z}

5) .(a,.(b,.(c,.(d,[])))) .(X,Y)

θ = {X/a, Y/.(b,.(c,.(d,[])))}

rappresentano liste

6) .(a,.(b,.(c,.(d,[])))) .(X,.(Y,Z))

θ = {X/a, Y/b, Z/.(c,.(d,[]))}

7) .(a,.(b,.(c,.(d,[])))) .(c,Y)

Non sono unificabili.

8) t(t(t(X,Y),l(c)),Y) t(t(t(Y,Y),l(c)),l(X))

Non sono unificabili

ALGORITMO DI UNIFICAZIONE

- Algoritmo in grado di determinare se due atomi (o termini) sono unificabili o meno e restituire, nel primo caso, la sostituzione unificatrice più generale.
- Esistono vari algoritmi di unificazione di differente complessità.
- Regole alla base dell'algoritmo di unificazione fra due termini T1 e T2.

T1 \ T2	<costante> C2	<variabile> X2	<termine composto> S2
<costante> C1	ok se C1=C2	ok {X2/C1}	NO
<variabile> X1	ok {X1/C2}	ok {X1/X2}	ok {X1/S2}
<termine composto> S1	NO	ok {X2/S1}	ok se S1 e S2 hanno stesso funtore e arietà e gli argomenti UNIFICANO

SEMPLICE ALGORITMO DI UNIFICAZIONE IN PASCAL

- Funzione UNIFICA che ha come parametri di ingresso due atomi o termini da unificare A e B e la sostituzione SOST eventualmente già applicata.
- La funzione <u>termina sempre</u> ed è in grado di fornire o la sostituzione più generale per unificare A e B o un fallimento (FALSE).
- Un termine composto (cioè diverso da costante o variabile) è rappresentato da una lista che ha come primo elemento il simbolo funzionale del termine e come altri elementi gli argomenti del termine.
- Es: f(a,g(b,c),X) rappresentato come: [f,a,[g,b,c],X].
- La funzione head, applicata a una lista L, restituisce il primo elemento di L, mentre la funzione tail il resto della lista L.
- Nell'esempio, head([f,a,[g,b,c],X]) restituisce f, mentre tail([f,a,[g,b,c],X]) restituisce [a,[g,b,c],X].

SEMPLICE ALGORITMO DI UNIFICAZIONE IN PSEUDO-PASCAL

```
function UNIFICA (A,B:termini; SOST:sostituzione): sostituzione;
var a,b:termini;
begin
    if  SOST = false
    then  UNIFICA:= false
    else
    begin
        a := [ A ] SOST;
        b := [ B ] SOST;
        if <a e b  sono costanti e a=b>
        then UNIFICA:=SOST
        else
        if <a è una variabile e non è presente in b >
        then
        begin
                <aggiorna SOST con la  nuova sostituzione  {a/b} >;
                UNIFICA:=SOST
```

SEMPLICE ALGORITMO DI UNIFICAZIONE IN PSEUDO-PASCAL

```
      end
      else
if   <b è una variabile e non è presente in a >
then
begin
      <aggiorna SOST con la nuova sostituzione  {b/a} >;
      UNIFICA:=SOST
end
else
if <a e b sono termini composti>
then UNIFICA:=UNIFICA(head(a),head(b),
      UNIFICA(tail(a),tail(b),SOST)
else UNIFICA:=  FALSE
end
end;
```


OCCUR CHECK

- È il controllo che un termine variabile da unificare con un secondo termine non compaia in quest'ultimo. Necessario per assicurare la terminazione dell'algoritmo e la correttezza del procedimento di unificazione.
- I due termini "X" e "f(X)" non sono: non esiste una sostituzione per X che renda uguali i due termini.
- Se un termine t ha una struttura complessa, la verifica se X compare in t può essere anche molto inefficiente.
- Prolog NON utilizza l'occur-check: non corretto !!

OCCUR CHECK: ESEMPI

- **Esempio:** Si consideri il programma:
  - P_4 `p(X,f(X)).`
  - e la query `?- p(Y,Y).`
  - Per Prolog `p(Y,Y)` segue logicamente da P_4 e viene prodotta la sostituzione (contenente un termine infinito): `Y=f(f(f(.....))))`
- **Esempio:** Si consideri il programma:
  - P_5 `p(X,f(X)).`
  - `q:- p(Y,Y).`
  - si ha che la query `?- q.`
  - ha successo sebbene P_5 non derivi q.
- Prolog non corretto per la logica delle clausole di Horn.

IL PRINCIPIO DI RISOLUZIONE PER LE CLAUSOLE GENERALI

- Clausole nelle quali possono comparire variabili.
- Siano C_1 e C_2 due clausole del tipo:

  $C_1 = A_1 \vee \ldots \vee A_n$ $C_2 = B_1 \vee \ldots \vee B_m$

- dove A_i (i=1..n) e B_j (j=1..m) è un letterale positivo o negativo in cui possono comparire variabili.
- Se esiste A_i e Bj tali che $[A_i]\theta = [\sim B_j]\theta$, dove θ è la sostituzione unificatrice più generale, allora si può derivare una nuova clausola C_3 (il risolvente):

  $[A_1 \vee .. \vee A_{i-1} \vee Ai+_1 \vee .. \vee A_n \vee B_1 \vee \ldots \vee B_{j-1} \vee B_{j+1} \vee .. \vee B_m]\theta$

- Date due clausole C_1 e C_2, il loro risolvente C_3 è conseguenza logica di $C_1 \cup C_2$.

MGU PER RICAVARE IL RISOLVENTE
Regola di inferenza

$$\frac{A_1 \vee ... \vee A_n B_1 \vee ... \vee B_m \exists\theta : [A_i]\theta = [\sim B_j]\theta}{[A_1 \vee ... \vee A_{i-1} \vee Ai +_1 \vee ... \vee A_n \vee B_1 \vee ... \vee B_{j-1} \vee B_{j+1} \vee ... \vee B_m]\theta}$$

dove θ è la sostituzione più generale per A_i e $\sim B_j$.

- **Esempio**

Si considerino le seguenti clausole:

p(X,m(a)) ∨ q(S,a) ∨ c(X) (C1)

~p(r,Z) ∨ c(Z) ∨ ~b(W,U) (C2)

I letterali p(X,m(a)) e p(r,Z) sono unificabili attraverso la mgu θ={X/r, Z/m(a)}.

Risolvente:

q(S,a) ∨ c(r) ∨ c(m(a)) ∨ ~b(W,U) (C3)

MGU PER RICAVARE IL RISOLVENTE
Regola di inferenza

- **Esempio**

Dalle seguenti clausole:

p(a,b) ∨ q(X,a) ∨ c(X) (C1)

~p(a,Y) ∨ ~c(f(Y)) (C2)

si ottengono i seguenti risolventi:

q(X,a) ∨ c(X) ∨ ~c(f(b)) (C3)

p(a,b) ∨ q(f(Y),a) ∨ ~p(a,Y) (C4)

C3: ottenuto selezionando p(a,b) da C1 e ~p(a,Y) da C2
e applicando la mgu θ={Y/b}.

C4: ottenuto selezionando c(X) da C1 e ~c(f(Y)) da C2
e applicando la mgu θ={X/f(Y)}.

DIMOSTRAZIONE PER CONTRADDIZIONE ATTRAVERSO LA RISOLUZIONE (1)

- Dati gli assiomi propri H di una teoria e una formula F, derivando da H∪{~F} la contraddizione logica si dimostra che F è un teorema della teoria.
- 1) Ridurre H e il teorema negato ~F in forma a clausole.

  H trasformato nell'insieme di clausole H^C: $H \rightarrow H^C$

  F negata e trasformata nell'insieme di clausole F^C: $\sim F \rightarrow F^C$
- 2) **All'insieme $H^C \cup F^C$ si applica la risoluzione**

  Se F è un teorema della teoria, allora la risoluzione deriva la contraddizione logica (clausola vuota) in un numero finito di passi.
- **Contraddizione:** Nella derivazione compariranno due clausole del tipo A e ~B con A e B formule atomiche unificabili.

DIMOSTRAZIONE PER CONTRADDIZIONE ATTRAVERSO LA RISOLUZIONE (2)

- Per dimostrare F, il metodo originario (Robinson) procede generando i risolventi per **tutte le coppie** di clausole dell'insieme di partenza $C_0 = H^C \cup F^C$ che sono aggiunti a C_0. Procedimento iterato, fino a derivare, se è possibile, la clausola vuota.
- 1. $C_{i+1} = C_i \cup$ {risolventi delle clausole di C_i}
- 2. Se C_{i+1} contiene la clausola vuota, termina.
- Altrimenti ripeti il passo 1.

ESEMPIO

Per semplicità ci si è limitati al caso di proposizioni:

$H = \{(a \to c \vee d) \wedge (a \vee d \vee e) \wedge (a \to \sim c)\}$

$F = \{d \vee e\}$

- La trasformazione in clausole di H e ~F produce:

$H^C = \{\sim a \vee c \vee d,\ a \vee d \vee e,\ \sim a \vee \sim c\}$

$F^C = \{\sim d,\ \sim e\}$ (cioe' $\sim(d \vee e)$)

- Si vuole dimostrare che $H^C \cup F^C$:

$\{\sim a \vee c \vee d,$	(1)
$a \vee d \vee e,$	(2)
$\sim a \vee \sim c,$	(3)
$\sim d,$	(4)
$\sim e\}$	(5)

- è contraddittorio.

ESEMPIO

- **Tutti i possibili risolventi al passo 1 sono:**

$\{c \vee d \vee e,$	(6)	da (1) e (2)
$d \vee e \vee \sim c,$	(7)	da (2) e (3)
$\sim a \vee c,$	(8)	da (1) e (4)
$a \vee e,$	(9)	da (2) e (4)
$a \vee d,$	(10)	da (2) e (5)
$\sim a \vee d\}$	(11)	da (1) e (3)

- **Al passo 2, da (10) e (11) viene derivato il risolvente:**

d (12)

e al passo 3, da (4) e (12) viene derivata anche la clausola vuota.

ESEMPIO

- **Si considerino gli insiemi:**

H= {$\forall$X (uomo(X) $\rightarrow$ mortale(X)), uomo(socrate)}

F = {$\exists$X mortale(X)}

La trasformazione in clausole di H e ~F produce:

H^C = {~uomo(X) $\vee$ mortale(X), uomo(socrate)}

F^C = {~mortale(X)}

L'insieme $H^C \cup F^C$ è il seguente:

{~uomo(X) $\vee$ mortale(X),(1)

uomo(socrate), (2)

~mortale(Y)} (3)

ESEMPIO

- La variabile X di F^C rinominata con Y che non appare in nessuna altra clausola dell'insieme. Questa operazione viene eseguita ogni volta che si aggiungono nuovi risolventi all'insieme delle clausole.
- Al passo 1, tutti i possibili risolventi, e le sostituzioni unificatrici più generali applicate per derivarli, sono:

{mortale(socrate),	**(4)**	**θ={X/socrate}**
~uomo(Z)}	**(5)**	**θ={X/Y}**

- Al passo 2, da (2) e (5) viene derivata la clausola vuota, applicando la sostituzione {Z/socrate}. La clausola vuota è anche derivabile dalle clausole (3) e (4) applicando la sostituzione {Y/socrate}.

ESEMPIO

1. cane(fido).
2. ~abbaia(fido).
3. scodinzola(fido).
4. miagola(geo).
5. scodinzola(X) and cane(X) -> amichevole(X).
6.~amichevole(X1) or abbaia(X1) or ~spaventato(Y1,X1).
7. cane(X2) -> animale(X2).
8. miagola(X3) -> gatto(X3).

Goal : 9. cane(X4) and gatto(Y)->spaventato(Y,X4).

ESEMPIO

1. cane(fido).
2. ~abbaia(fido).
3. scodinzola(fido).
4. miagola(geo).
5.~scodinzola(X) or ~cane(X) or amichevole(X).
6.~amichevole(X1) or abbaia(X1) or ~spaventato(Y1,X1).
7.~cane(X2) or animale(X2).
8.~miagola(X3) or gatto(X3).

Goal negato: 9.~cane(X4) or ~gatto(Y)or spaventato(Y,X4).
Da 9 e 1:   10. ~gatto(Y) or spaventato(Y,fido).
Da 10. e 6: 11. ~amichevole(fido) or abbaia(fido) or ~gatto(Y).
Da 11. e 2: 12. ~amichevole(fido) or ~gatto(Y).
Da 8. e 12:   13. ~amichevole(fido) or ~miagola(Y).
Da 13. e 4:   14. ~amichevole(fido).
Da 5. e 14: 15. ~scodinzola(fido) or ~cane(fido).
Da 3. e 15: 16. ~cane(fido)
Da 1. e 16. CONTRADDIZIONE !!

CORRETTEZZA e COMPLETEZZA

- Si può dimostrare che sotto opportune strategie, la risoluzione è **corretta e completa**.
- Se viene generata la clausola vuota la teoria $H^C \cup F^C$ è insoddisfacibile e se la teoria $H^C \cup F^C$ è insoddisfacibile la derivazione genera la clausola vuota in un numero finito di passi.
- **Teorema**

  (Correttezza e completezza della risoluzione)
- Un insieme di clausole è insoddisfacibile se e solo se l'algoritmo di risoluzione termina con successo in un numero finito di passi, generando la clausola vuota.
- Il metodo di risoluzione procede esaustivamente generando tutti i possibili risolventi ad ogni passo.

STRATEGIE

- Si definiscono strategie che scelgono opportunamente le clausole da cui derivare un risolvente.
- I metodi di prova che si ottengono risultano più efficienti anche se in alcuni casi possono introdurre incompletezza.
- La dimostrazione attraverso il principio di risoluzione può essere rappresentata con un grafo, detto **grafo di refutazione**.
- Le clausole dell'insieme base $H^C \cup F^C$ sono nodi del grafo dai quali possono solo uscire archi.
- Un risolvente corrisponde a un nodo nel quale entrano almeno due archi (ciascuno da una delle due clausole "parent").
- **Strategia in ampiezza** ("**breadth-first**"). Al passo i ($i \geq 0$), genera tutti i possibili risolventi a livello i+1-esimo utilizzando come clausole "parent" una clausola di C_i (cioè una clausola a livello i) e una di Cj ($j \leq i$), cioè una clausola appartenente a un livello uguale o minore di i.

ESEMPIO

H = H^C = {on(b1,tavola), (1)

on(b2,tavola), (2)

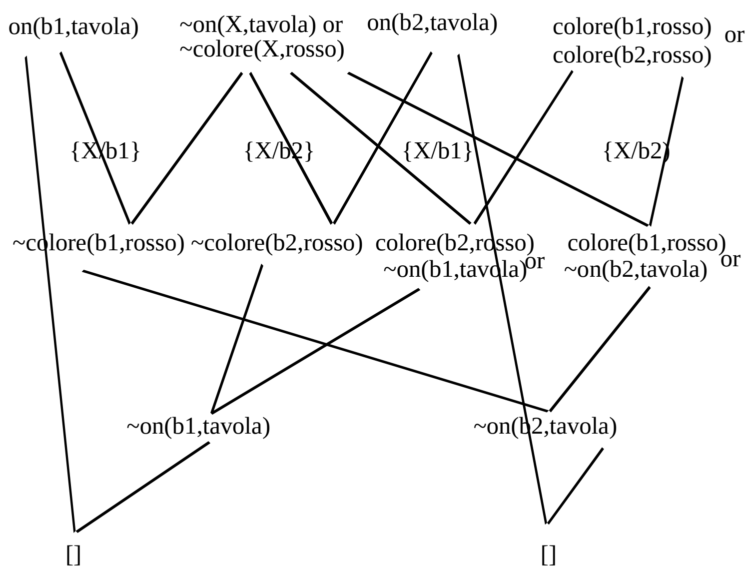
colore(b1,rosso) $\vee$ colore(b2,rosso) (3)

F = {$\exists$X (on(X,tavola) $\wedge$ colore(X,rosso))}

F^C = {~on(X,tavola) $\vee$ ~colore(X,rosso)}

- L'applicazione della strategia in ampiezza produce il **grafo di refutazione** riportato nel seguito:

ESEMPIO



STRATEGIE

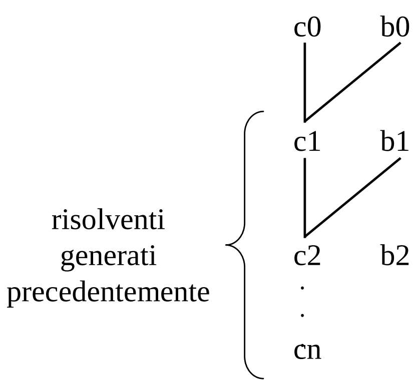
- Strategia **set-of-support** (completa) sceglie almeno una clausola "parent" fra quelle derivate dalla negazione della formula che si vuole dimostrare o dai loro discendenti.

- Strategia **lineare** (completa) sceglie almeno una clausola "parent" dall'insieme base C_0 oppure tra i risolventi generati precedentemente. La seconda clausola parent è sempre il risolvente ottenuto al passo precedente.

- Nel caso di risoluzione lineare, il grafo di refutazione diventa un albero, detto albero di refutazione.

STRATEGIE

Albero lineare : c_0 appartiene a C_0 (cioè all'insieme base) e b_i appartiene a C_0 oppure è uguale a c_j con j<i.

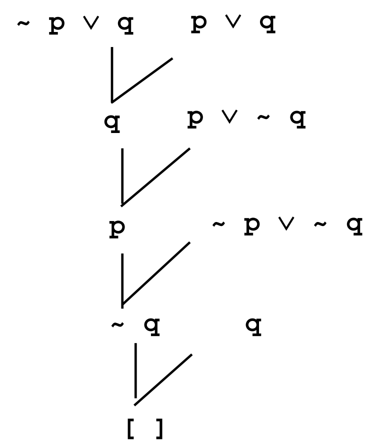


ESEMPIO

- C0={p∨q, ~p∨q, p∨~q, ~p∨~q}, ottenuto da:

  H = {q→p, ~q→p, p→q} ; F = q∧p negando ~ (q∧p) cioe' ~p∨~q

- Le clausole "parent" rappresentate sulla destra dell'albero sono formule di C0 (le prime tre) e un risolvente generato in precedenza (la formula "q").



ESEMPIO

H^C={sum(0,X1,X1), sum(s(X),Y,s(Z)) ∨ ~sum(X,Y,Z)}

F^C = {~sum(s(0),s(s(0)),Y1)}

- dove F^C è stato ottenuto negando la formula:

  F = ∃Y sum(s(0),s(s(0)),Y)

- L'insieme base $C_0=H^C \cup F^C$ risulta:

  C_0 = {sum(0,X1,X1), sum(s(X),Y,s(Z)) ∨ ~sum(X,Y,Z),

  ~sum(s(0),s(s(0)),Y1)}

- Strategie complete producono comunque grafi di refutazione molto grandi → inefficienti → strategie non complete.

ESEMPIO

~sum(s(0),s(s(0)),Y1)   sum(s(X),Y,s(Z)) or ~sum(X,Y,Z)

{X/0,Y/s(s(0)),Y1/s(Z)}

~sum(0,s(s(0)),Z)   sum(0,X1,X1)

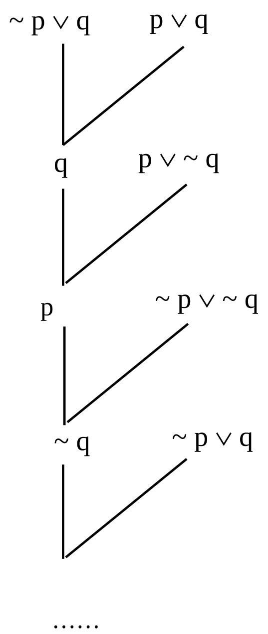
{X1/s(s(0)),Z/s(s(0))}

[]

STRATEGIE

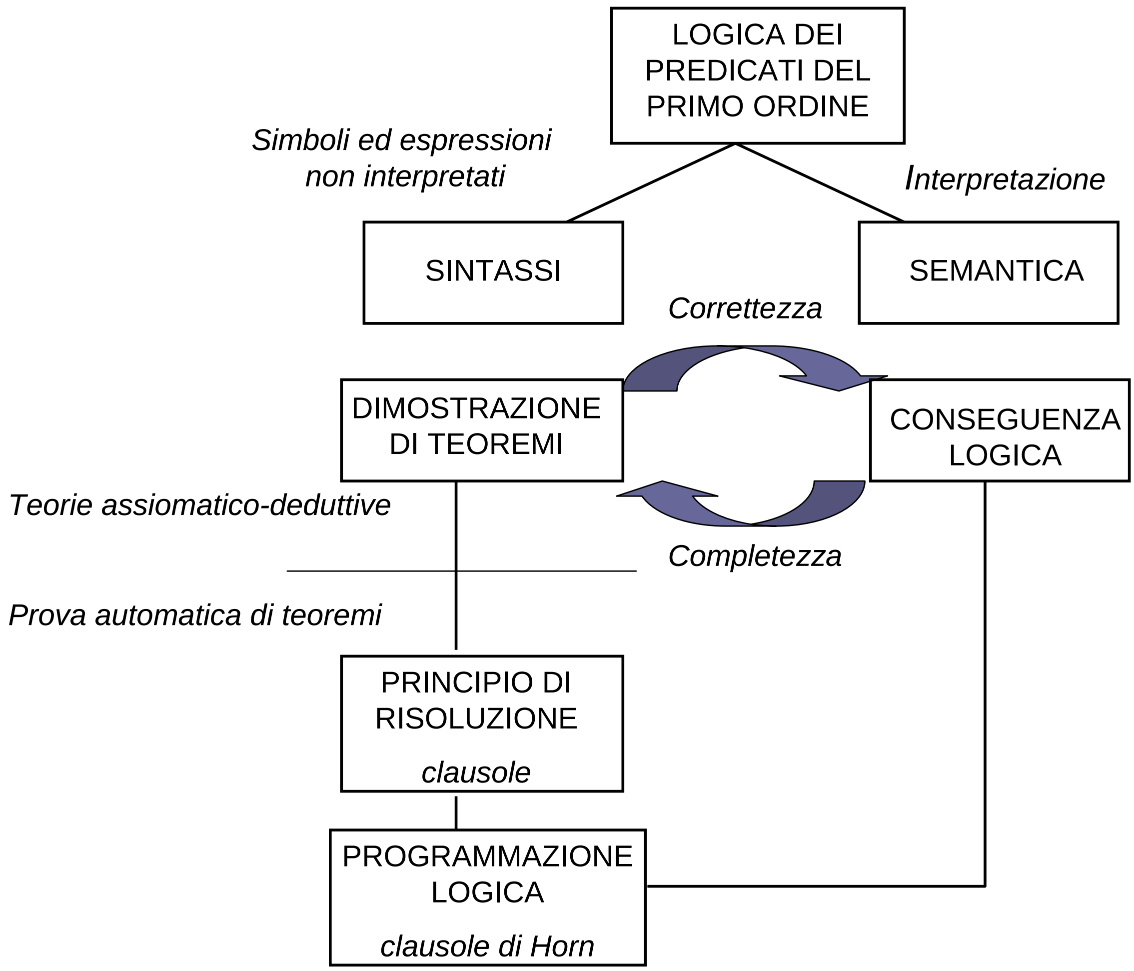
- Strategia **linear-input** non completa sceglie che ha sempre una clausola “parent” nell'insieme base C_0, mentre la seconda clausola “parent” è il risolvente derivato al passo precedente.
- Caso particolare della risoluzione lineare:
  - vantaggio: memorizzare solo l'ultimo risolvente
  - svantaggio: non completa

ESEMPIO



C0={p∨q, ~p∨q, p∨~q, ~p∨~q} insoddisfacibile, ma la risoluzione con strategia "linear-input" produce sempre clausole che hanno almeno un letterale, e quindi non è in grado di derivare la clausola vuota.

Se ci si limita, però, a un sottoinsieme delle clausole, in particolare alle clausole di Horn, allora la strategia ***"linear-input" è completa***.



LE CLAUSOLE DI HORN

- *La logica a clausole di Horn è un sottoinsieme della logica a clausole*
- **Le clausole di Horn hanno al più un letterale positivo.**
- *Le clausole possono essere scritte in una forma equivalente sostituendo al simbolo di disgiunzione $\vee$ e negazione ~ il simbolo di implicazione logica ($\rightarrow$) ricordando che:*

  $\sim B \vee A$ *equivale a* $B \rightarrow A$

- *Nel seguito si indicherà l'implicazione logica $B \rightarrow A$ con:*

  $A \leftarrow B$ *("B implica A", oppure "A se B").*

- *La clausola:* $A_1 \vee \ldots \vee A_n \vee \sim B_1 \vee \ldots \vee \sim B_m$
- *può essere riscritta come:* $A_1, \ldots, A_n \leftarrow B_1, \ldots, B_m$
- *dove i simboli "," che separano gli atomi A_i sono da interpretare come disgiunzioni, mentre quelli che separano gli atomi B_j sono congiunzioni.*
- *Clausole di Horn:* $A \leftarrow B_1, \ldots, B_m \quad \leftarrow B_1, \ldots, B_m$ *Goal*

ESEMPIO

H={on(b1,tavolo)$\wedge$on(b2,tavolo))$\wedge$ ((colore(b1,rosso)$\vee$colore(b2,rosso)))}

è esprimibile in clausole, ma non in clausole di Horn.

- La sua trasformazione in clausole risulterà infatti:

  H^C={on(b1,tavolo),on(b2,tavolo), colore(b1,rosso) $\vee$colore(b2,rosso)}

  dove la clausola: colore(b1,rosso) $\vee$ colore(b2,rosso)
  non è una clausola di Horn.

- Risoluzione per le clausole di Horn: **risoluzione SLD** *resolution with **S**election rule, **L**inear input strategy for **D**efinite clauses*
- Risoluzione SLD opera per contraddizione e quindi si procede negando la formula F da dimostrare.
- Poiché F è una congiunzione di formule atomiche quantificate esistenzialmente, la sua negazione produrrà una disgiunzione di formule atomiche negate quantificata universalmente, cioè una clausola di Horn goal.

ESEMPIO

- La negazione della formula:

F=∃W sum(s(0),0,W)

- è la clausola goal:

← sum(s(0),0,W).

- Le negazioni delle formule:

∃Y sum(s(0),s(s(0)),Y)

∃Y ∃Z sum(s(0),s(s(0)),Y) ∧ sum(Y,s(0),Z)

- sono rispettivamente:

← sum(s(0),s(s(0)),Y)

← sum(s(0),s(s(0)),Y),sum(Y,s(0),Z).